# Exercices d'entraînement : la base de Haar

On considère l'espace de Hilbert $L^2[0,1]$, l'ensemble des intervalles dyadiques $I_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]$, $k = 0, 1, \cdots, 2^j - 1$, $j \in \mathbb{N}$, et leurs fonctions caractéristiques respectives

$$\phi_{j,k}(x) \equiv \mathbb{I}_{I_{j,k}}(x) = \begin{cases} 0 & x \notin I_{j,k} \\ 1 & x \in I_{j,k}. \end{cases} \tag{15}$$

1. Montrer que les $\phi_{j,k}$ sont des éléments de $L^2[0,1]$.

2. Les $\phi_{j,k}$ sont-elles linéairement indépendantes?

3. Définir une hiérarchie dans l'organisation des $\phi_{j,k}$ de manière à en extraire un système linéairement indépendant.

4. Construire à l'aide du procédé de Gram-Schmidt un système orthonormé

   $$\{\phi_{00}, h_{j,k}\},\ k = 0, 1, \cdots, 2^j - 1,\ j \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

   en utilisant la hiérarchie définie précédemment.

5. Montrer que

   $$h_{j,k}(x) = 2^{j/2} h(2^j x - k), \tag{17}$$

   où $h(x)$ est l'ondelette mère dite de *Haar*,

   $$h(x) = \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{2}]}(x) - \mathbb{I}_{[\frac{1}{2},1]}(x). \tag{18}$$

6. Montrer que le système $\{\phi_{00}, h_{j,k}\}$ est une base orthonormée de $L^2[0,1]$. C'est la *base de Haar*.

7. Montrer par simple élargissement des échelles que le système $\{h_{j,k}\}$, $j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}$, forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

# Travaux Domestique

Question: Pour $\mathcal{L} = -i\frac{d}{dx}$ definit sur $[0,\pi]$, la condition, $\phi(a) = e^{i\beta}\phi(b)$ (où $\beta \in \mathbb{R}$) fait-elle annuler les termes aux bords ?
Si oui, trouver, pour les cas $\beta = \pi$ et $\beta = \pi/2$, la base [complète] orthogonale de $L_2[0,\pi]$. Sinon, justifier.

# corrigé de l'Exercice d'entraînement : la base de Haar

**Objective:** De savoir un exemple de système de repère qui n'est pas trigonometrique ni exponentiel.

**Q1.** Carré integrable, donc "Oui".

**Q2.** $\phi_{0,0}(x) = \phi_{1,0}(x) + \phi_{1,1}(x)$, donc "Non".

**Q3 & Q4** **(1)** $\{\phi_{0,0}, \phi_{1,0}\}$ sont independants.
Par le principe de Fig **??**, on construit, à partir de $\{\phi_{0,0}, \phi_{1,0}\}$ un vecteur qui est orthogonal à $\phi_{0,0}$ :

$$|\psi\rangle = (1 - |\phi_{0,0}\rangle\langle\phi_{0,0}|)|\phi_{1,0}\rangle = |\phi_{1,0}\rangle - \frac{1}{2}|\phi_{0,0}\rangle.$$

(Voir "0.1" dans Fig.**??** sauf un facteur numérique).

**(2)** On note que les fonctions qui n'ont pas des valeurs non-nulles dans $[0, 2^{-1}]$ et celles qui n'ont pas des valeurs non-nulles dans $[2^{-1}, 1]$ sont orthogonales et donc independants.

**(3)** On répète l'argument du **(1)** ci-dessus en $[0, 2^{-1}]$ et en $[2^{-1}, 1]$ séparement, pour construire "0.01" et "0.11" dans Fig.**??**, qui sont respectivement orthogonales à "0.1", aussi.

**(4)** On sous-diviser $[0, 2^{-1}]$ en $[0, 2^{-2}]$ et $[2^{-2}, 2^{-1}]$, et construit, respectivement, "0.001" et "0.011". ...

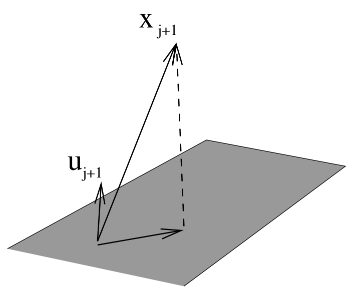


Figure 1: Gram-Schimidt: Plan en gris represente l'éspace $j$-dimensionnel engendrè par les vecteurs $\{x_1, x_2, \ldots, x_j\}$ ($\mathbf{0} \leq j < n$). (L'éspace $\{x_1, x_2, \ldots, x_j\}$ est nul pour **0**.) Le vecteur $x_{j+1}$ y rajoute une autre dimension. Le "ombre" (le flésh sur léspace de $\{x_1, x_2, \ldots, x_j\}$) represent la projection orthogonale de $x_{j+1}$, i.e. "$P_{S_j}|x_{j+1}\rangle$".

**Q5.** **Contraction:** Par rapport à la graphique de $y = f(x)$, La graphique de $y = f(ax)$ est une "compaction" horizontale par $a$ fois autour de l'origine, $x = 0$.

**Décalage:** Par rapport à la graphique de $y = g(x)$, la graphique de $y = g(x - b)$ est un "décalage" holisontale de la distance $b$ vers $+x$.

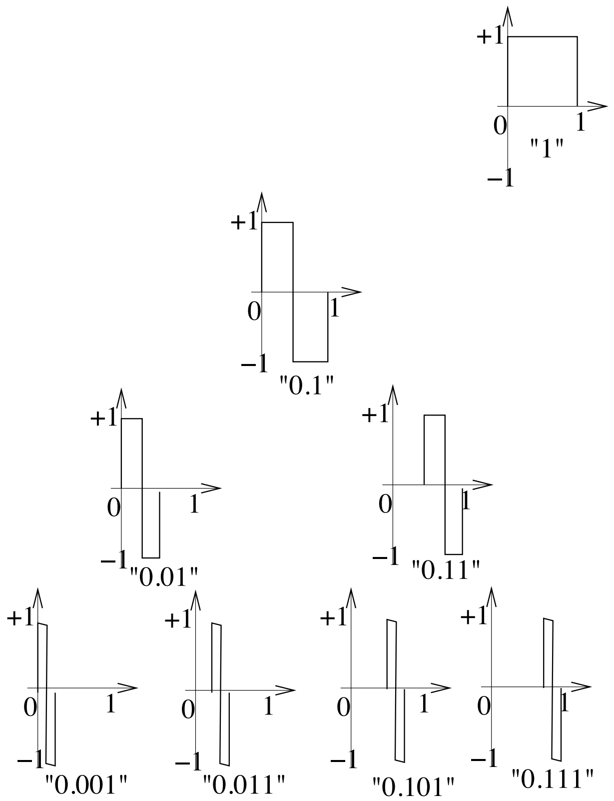


Figure 2: “1”$= \phi_{0,0}$. “0.1”$\propto h_{0,0} \equiv h$. Pour du reste, on definit $(j,k)$ tel que “$\cdot$”(en système binaire)$= \frac{k+1}{2^j}$. Par exemple, “0.101”(binaire) $= \frac{5}{8}$, donc $(j,k) = (3,4)$. Le graphic de $(j,k)$ est de la $j$-ème génération du $h(x) \equiv h_{0,0}$ (la première génération). Cette generation comprend en totale $2^{j-1}$ de $h_{j-1,\ell}$ differents. ($\frac{k+1}{2^j}$ est la coordonnée, $x$, où la valeur du graphique change sa signe.) Comme les nombres binaires entre 0 et 1 de digits finis sont comptable, ces bases sont comptable.

**Contraction, ensuite décalage:** Par rapport à la graphique de $y = \psi(x)$, La graphique de $y = \psi(a(x-b))$ est une “compaction” horizontale par $a$ fois autour de l'origine, $x = 0$, et *ensuite* décalè de la distance $b$ vers $+x$. (Note: Si on avait décalé de $b$ avant de contraction par $a$ fois autour de l'origine, $x = 0$, alors on aurait $y = \psi(ax - b)$.)

**Application:** $h(2^j x - k) = h(2^j(x - \frac{k}{2^j}))$ est donc la contraction par $2^j$ fois et puis la déplacement de $\frac{k}{2^j}$ de $h(x)$, ce qu'on peut verifier par Fig.**??**.

**Q6.** Pour la normalisation, on calcule

$$\langle h_{j,k}|h_{j,k}\rangle = \int_0^1 2^j h(2^j(x - 2^{-j}k))\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2^j h(2^j(x - 2^{-j}k))\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} h(2^j(x - 2^{-j}k))\mathrm{d}(2^j x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(2^j x)\mathrm{d}(2^j x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z)\mathrm{d}z = 1. \tag{19}$$

**À quoi ça sert, la base de Haar** ? Pour exprimer des fonctions localisé spatiellement.