ESPCI

Mathématiques 2$^{\text{ème}}$ année

Recueil d'exercices

1 Équations aux dérivées partielles

1.1 Méthode des caractéristiques (5 pts)

On considère l'équation aux dérivées partielles pour la fonction u :

$$y\partial_x u(x,y) + x\partial_y u(x,y) = 0. \tag{1}$$

définie sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, |y| \leq x\}$.

Question 1 (2 pts) : Déterminez l'équation des courbes caractéristiques $(\hat{x}(s), \hat{y}(s))$ le long desquelles la fonction u est constante. Montrez que $\hat{x}(s)^2 - \hat{y}(s)^2$ est constant le long d'une caractéristique.

Question 2 (1 pt) : Tracez une famille de caractéristiques.

Question 3 (2 pts) : Donnez la solution qui satisfait la condition $u(x,0) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Il est possible, mais pas indispensable, de paramétrer les caractéristiques à l'aide des fonctions ch et sh.

Corrigé

Question 1 : L'équation des caractéristiques est

$$\hat{x}'(s) = \hat{y}(s), \tag{2}$$
$$\hat{y}'(s) = \hat{x}(s). \tag{3}$$

On en déduit facilement que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\hat{x}(s)^2 - \hat{y}(s)^2] = 0$.

Question 2 : Sur une caractéristique $x^2 - y^2 = A^2$ (car $x^2 \geq y^2$), donc on peut écrire $x = \sqrt{A^2 + y^2}$. Il s'agit d'hyperboles.

Question 3 : La caractéristique d'équation $x^2 - y^2 = A^2$ coupe l'axe $y = 0$ en $x = A$, donc $u(x,y) = u(\sqrt{x^2 - y^2}, 0) = f(\sqrt{x^2 - y^2})$.

Alternativement, de l'équation des caractéristiques on déduit que $\hat{x}''(s) = \hat{x}(s)$ et $\hat{y}''(s) = \hat{y}(s)$, et les solutions qui sont sur le bon domaine sont de la forme $\hat{x}(s,A) = A\,\mathrm{ch}(s)$, $\hat{y}(s,A) = A\,\mathrm{sh}(s)$. La caractéristique $(A\,\mathrm{ch}(s), A\,\mathrm{sh}(s))$ coupe l'axe $y = 0$ quand $s = 0$, au point $(A, 0)$. Un point (x,y) appartient à la caractéristique correspondante à $A = \sqrt{x^2 - y^2}$, en $s = (y/x)$, donc $u(x,y) = \hat{u}(s,A) = \hat{u}(0,A) = u(A,0) = f(A)$.

1.2 Méthode des caractéristiques (5 pts)

On considère l'équation aux dérivées partielles pour la fonction u :

$$y\partial_x u(x,y) - 4x\partial_y u(x,y) = 0. \tag{4}$$

définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Question 1 (2 pts) : Déterminez l'équation des courbes caractéristiques $(\hat{x}(s), \hat{y}(s))$ le long desquelles la fonction u est constante. Montrez que $4\hat{x}(s)^2 + \hat{y}(s)^2$ est constant le long d'une caractéristique.

Question 2 (1 pt) : Tracez une famille de caractéristiques.

Question 3 (2 pts) : Donnez (a) la solution qui satisfait $u(x,0) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ et (b) la solution qui satisfait $u(x,0) = x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Corrigé

Question 1 : L'équation des caractéristiques est

$$\hat{x}'(s) = \hat{y}(s), \tag{5}$$
$$\hat{y}'(s) = -4\hat{x}(s). \tag{6}$$

On en déduit facilement que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[4\hat{x}(s)^2 + \hat{y}(s)^2] = 0$.

Question 2 : Sur une caractéristique $4x^2 + y^2 = A^2$. Il s'agit d'ellipses (par exemple de hauteur 2 et de largeur 1 pour $A = 1$).

Question 3 : D'après la première question $u(x,y) = f(4x^2 + y^2)$. (a) $u(x,0) = x = f(4x^2)$: ce n'est pas possible, par exemple $u(1,0) = 1$ donne $f(4) = 1$ et $u(-1,0) = -1$ donne $f(4) = -1$. (b) $u(x,0) = x^2 = f(4x^2)$, donc $f(w) = w/4$ et $u(x,y) = (4x^2 + y^2)/4 = x^2 + y^2/4$.

1.3 Méthode des caractéristiques (4 pts)

On considère l'équation aux dérivées partielles pour la fonction u :

$$y\partial_x u(x,y) - x\partial_y u(x,y) = u(x,y). \tag{7}$$

définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Question 1 (2 pts) : Déterminez l'équation des courbes caractéristiques $(\hat{x}(s), \hat{y}(s))$ le long desquelles la fonction u est constante. Montrez que les caractéristiques sont des cercles.

Question 2 (2 pts) : Quelle équation différentielle satisfait $\hat{u}(s) = u(\hat{x}(s), \hat{y}(s))$? Donnez l'ensemble des solutions à l'équation (7).

Corrigé

Question 1 : L'équation des caractéristiques est

$$\hat{x}'(s) = \hat{y}(s), \tag{8}$$
$$\hat{y}'(s) = -\hat{x}(s). \tag{9}$$

On en déduit facilement que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\hat{x}(s)^2 + \hat{y}(s)^2] = 0$: l'équation d'une caractéristique peut donc se mettre sous la forme $x^2 + y^2 = R$, c'est l'équation d'un cercle de rayon R.

Question 2 : On calcule $\hat{u}'(s) = \hat{x}'(s)\partial_x u(\hat{x}(s), \hat{y}(s)) + \hat{y}'(s)\partial_y u(\hat{x}(s), \hat{y}(s)) = u(\hat{x}(s), \hat{y}(s)) = \hat{u}(s)$. La solution est de la forme $\hat{u}(s) = \hat{u}(0)\mathrm{e}^s$. Comme cette équation est satisfaite sur un cercle, il faut que $\hat{u}(0) = 0$: la seule solution est la fonction nulle, $u(x,y) = 0$.

1.4 Méthode des caractéristiques (5 pts)

Soit l'équation aux dérivées partielles définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\partial_x u(x,y) + xy\partial_y u(x,y) = 0. \tag{10}$$

Question 1 (3 pts) : En utilisant la méthode des caractéristiques, donner la solution générale de cette équation.

Question 2 (2 pts) : Quelles sont les solutions satisfaisant à chacune des conditions aux limites suivantes :

(i) $\forall y \in \mathbb{R}$, $u(0, y) = y^2$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x, 0) = x^2$?

Corrigé

Question 1 : Les caractéristiques vérifient l'équation $\hat{x}'(s) = 1$, $\hat{y}'(s) = \hat{x}(s)\hat{y}(s)$. On peut donc prendre $\hat{x}(s) = s$, puis $\hat{y}(s) = y_0 \mathrm{e}^{s^2/2}$, avec $y_0 \in \mathbb{R}$ un paramètre de la caractéristique. On trouve que sur une caractérisque, $\hat{u}(s) = u(\hat{x}(s), \hat{y}(s))$ est constant, donc $\hat{u}(s) = \hat{u}(0) = u(0, y_0) = f(y_0)$.

Prenons un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et déterminons sur quelle caractéristique il se trouve et pour quelle valeur de s : $x = s$ et $y = y_0 \mathrm{e}^{s^2/2}$, ce qui donne $s = x$ et $y_0 = y\mathrm{e}^{-x^2/2}$. Donc $u(x, y) = u(0, y_0) = f(y_0) = f(y\mathrm{e}^{-x^2/2})$:

$$u(x, y) = f(y\mathrm{e}^{-x^2/2}) \tag{11}$$

est la solution générale de l'équation différentielle.

Question 2 :

(i) Cela correspond simplement à $f(y) = y^2$, la solution est donc

$$u(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2} y^2. \tag{12}$$

(ii) L'ensemble $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ correspond à la caractéristique $y_0 = 0$. Or $u(x, y)$ est constant le long d'une caractéristique. Cette condition est incompatible avec la forme générale, il n'y a pas de solution.

1.5 Existence et unicité pour l'équation de Poisson en dimension 1 (5 pts)

On considère l'équation de Poisson en dimension $d = 1$ sur l'intervalle $\Omega = [0, 1]$:

$$u''(x) = f(x). \tag{13}$$

Question 1 (2 pts) : Montrez que la solution est unique avec une condition au bord de Dirichlet, de Neumann, ou mixte (la démonstration doit être spécifique à la dimension 1 du problème, mais ne doit pas utiliser la forme de la solution trouvée à la question suivante).

Question 2 (1 pt) : Donnez la solution générale de l'équation homogène $u''(x) = 0$.

Question 3 (2 pts) : Étudiez l'existence d'une solution pour les différentes conditions au bord données à la question 1.

Corrigé

Question 1 : Pour adapter le calcul des notes de cours, il faut utiliser que le bord est $\partial\Omega = \{0, 1\}$ et que le vecteur unitaire normal au bord et pointant vers l'extérieur du domaine est $n(0) = -1$, $n(1) = 1$. La différence $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$ entre deux solutions du problème est solution du problème homogène associé (avec conditions au bord nulles), on peut donc écrire

$$0 = v(1)v'(1) - v(0)v'(0) = \int_0^1 (vv')'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 [vv'' + v'^2](x)\mathrm{d}x = \int_0^1 v'(x)^2 \mathrm{d}x. \tag{14}$$

Donc $v'(x) = 0$ sur Ω, donc $v(x)$ est constante sur Ω. Pour des conditions au bord de Neumann, on ne peut pas en dire plus et la solution est unique à une constante près. Pour des conditions de Dirichlet ou mixte, $v(x) = 0$ en un point du bord donc $v(x) = 0$ sur Ω.

Question 2 : En intégrant deux fois $u''(x) = 0$ et en gardant les constantes d'intégration, on trouve $u(x) = ax + b$.

Question 3 : Pour des conditions au bord de Dirichlet, $u(0) = \alpha$ et $u(1) = \beta$, il suffit de prendre $u(x) = \alpha + x(\beta - \alpha)$. Pour des conditions au bord mixtes, $u(0) = \alpha$, $u'(1) = \beta$, il faut prendre $u(x) = \alpha + \beta x$; si $u'(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$, il faut prendre $u(x) = \alpha x + \beta - \alpha$. Pour des conditions de Neumann, $u'(0) = \alpha$, $u'(1) = \beta$, il n'y a pas de solution si $\alpha \neq \beta$ car $u'(x) = a$ est constante sur Ω.

1.6 Diffusion avec un bord absorbant (7 pts)

On considère une particule dont la position $X(t) \in \mathbb{R}_+$ diffuse, et la particule est absorbée quand elle atteint $x = 0$. On cherche la loi du temps T auquel elle touche le bord, en fonction de sa position de départ x_0. Sa densité de probabilité $p(x,t)$ obéit à l'équation de diffusion

$$\partial_t p(x,t) = \frac{1}{2}\partial_x^2 p(x,t), \tag{15}$$

à partir de la condition initiale

$$p(x,0) = \delta(x - x_0) \tag{16}$$

et satisfait les conditions aux limites

$$p(0,t) = 0, \tag{17}$$

$$p(x \to \infty, t) = 0. \tag{18}$$

La première condition représente le bord absorbant.

Question 1 (1 pt) : Montrez que la solution à l'équation (15) avec les conditions (16) à (18) est unique.

Question 2 (2 pts) : En utilisant la fonction de Green de l'équation de la chaleur, montrez que la solution est donnée par

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[\exp\left(-\frac{[x - x_0]^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{[x + x_0]^2}{2t}\right)\right]. \tag{19}$$

La probabilité que la particule ait « survécu » jusqu'au temps t est donnée par

$$S(t) = \mathrm{P}(T \geq t) = \int_0^\infty p(x,t)\mathrm{d}x. \tag{20}$$

Question 3 (1 pt) : Exprimez cette probabilité de survie comme une intégrale sur un intervalle borné, puis avec la fonction erreur, qui est définie par $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Question 4 (2 pts) : Déduisez la fonction de répartition de T puis sa loi, $f_T(t)$. Représentez graphiquement la loi $f_T(t)$.

Question 5 (1 pt) : Que vaut l'espérance de T ?

Corrigé

Question 1 :

Question 2 : La fonction de Green de l'équation de la chaleur avec le coefficient de diffusion $D = 1/2$ est donnée par

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right). \tag{21}$$

On montre que $p(x,t) = G(x - x_0, t) - G(x + x_0, t)$ vérifie toutes les équations (méthode des images).

Question 3 :

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-x_0}^{x_0} \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right) \mathrm{d}u = \mathrm{erf}\left(\frac{x_0}{\sqrt{2t}}\right). \tag{22}$$

Question 4 : Comme $S(t) = \mathrm{P}(T \geq t) = 1 - F_T(t)$,

$$f_T(t) = -S'(t) = \frac{x_0}{(2t)^{3/2}} \mathrm{erf}'\left(\frac{x_0}{\sqrt{2t}}\right) = \frac{x_0}{\sqrt{2\pi} t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x_0^2}{2t}\right). \tag{23}$$

Question 5 : L'intégrale à calculer pour avoir l'espérance de T se comporte comme $t^{-1/2}$ quand $t \to \infty$, elle n'est donc pas intégrale. On peut donc écrire $\mathrm{E}(T) = \infty$. Avec un bord en 0 et un bord en l, on avait $\mathrm{E}(T) = x_0(l - x_0)$; en prenant la limite $l \to \infty$, on retrouve le problème avec un seul bord et $\mathrm{E}(T) \to \infty$, le résultat n'est donc pas étonnant.

1.7 Diffusion dans une boîte (8 pts)

On considère l'équation différentielle

$$\partial_t u(x,t) = D \partial_x^2 u(x,t) \tag{24}$$

définie pour $(x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+$, avec les conditions aux limites $\partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t) = 0 \ \forall t$. On définit la norme d'une fonction $g(x)$ sur $[0,1]$ par $\|g\| = \left[\int_0^1 g(x)^2 \mathrm{d}x\right]^{1/2}$.

Question 1 (1 pt) : Pour une solution de l'équation (24), on définit $U(t) = \int_0^1 u(x,t)\mathrm{d}x$. Montrez que $U(t)$ est constante.

Question 2 (1 pt) : Déterminez les solutions stationnaires de l'équation (24), c'est à dire les fonctions telles que $u''(x) = 0$ et qui vérifient les conditions aux limites. Donnez la solution $u_0(x)$ telle que $\|u_0\| = 1$.

Question 3 (3 pts) : On considère l'équation aux valeurs propres $u''(x) = \lambda u(x)$ avec les conditions aux limites $u'(0) = u'(1) = 0$. Montrez que les valeurs propres doivent vérifier $\lambda \leq 0$. Déterminez les valeurs propres λ_n et les fonctions propres normalisées $u_n(x)$ correspondantes (telles que $\|u_n\| = 1$).

On considère maintenant l'équation (24) avec la condition initiale $u(x,0) = \delta(x - x_0)$, avec $x_0 \in [0,1]$.

Question 4 (1 pt) : Déterminez la limite $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

Question 5 (2 pts) : En utilisant les valeurs propres et fonctions propres calculées plus haut, trouvez un équivalent de $v(x,t) = u(x,t) - \lim_{t\to\infty} u(x,t)$ quand $t \to \infty$.

Corrigé

Question 1 : $\dot{U}(t) = \int_0^1 \partial_t u(x,t)\mathrm{d}x = D \int_0^1 \partial_x^2 u(x,t)\mathrm{d}x = D[\partial_x u(x,t)]_0^1 = 0$ avec les conditions aux limites.

Question 2 : La solution stationnaire doit vérifier $u''(x) = 0$, donc $u(x) = ax + b$. Les conditions aux limites imposent $a = 0$, donc $u(x) = b$. La solution stationnaire normalisée est $u_0(x) = 1$.

Question 3 : En multipliant par $u(x)$ et en intégrant sur x, on obtient $\int_0^1 u(x)u''(x)\mathrm{d}x = -\lambda \int_0^1 u(x)^2 \mathrm{d}x$. En intégrant le terme de gauche par parties et en utilisant les conditions aux limites, on arrive à $-\int_0^1 u'(x)^2 \mathrm{d}x =$

$-\lambda\int_0^1 u(x)^2\mathrm{d}x$, donc $\lambda \leq 0$ si $u(x) \neq 0$. $\lambda = 0$ est valeur propre pour la solution stationnaire $u_0(x)$ de la question précédente.

Si $\lambda < 0$, $u(x) = a\cos(\sqrt{-\lambda}x) + b\sin(\sqrt{-\lambda}x)$, et les conditions aux limites imposent $b = 0$ et $\sqrt{-\lambda} = \pi n$, soit $\lambda_n = -\pi^2 n^2$ et $u_n(x) = \sqrt{2}\cos(\pi n x)$ (le facteur $\sqrt{2}$ est choisi de sorte que $\|u_n\| = 1$).

Question 4 : Quand $t \to \infty$, la fonction $u(x,t)$ doit tendre vers une solution stationnaire : $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = bu_0(x)$. Alors $U(0) = 1$ et $\lim_{t\to\infty} U(t) = b$, ainsi $b = 1$ et $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u_0(x)$.

Question 5 : On écrit la solution sous la forme $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)u_n(x)$. En insérant dans l'équation (24), on trouve $a_n(t) = a_n(0)\exp(-D\pi^2 n^2 t)$. Le terme $a_0 u_0(x)$ correspond à la solution stationnaire, donc $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)u_n(x)$. Quand $t \to \infty$, $v(x,t) \sim u_1(x)a_1(0)\exp(-D\pi^2 t)$. $u_1(x) = \sqrt{2}\cos(\pi x)$ et $a_1(0) = \int_0^1 u_1(x)u(x,0)\mathrm{d}x = \sqrt{2}\cos(\pi x_0)$, ainsi

$$v(x,t) \underset{t\to\infty}{\sim} 2\cos(\pi x_0)\cos(\pi x)\mathrm{e}^{-D\pi^2 t}. \tag{25}$$

1.8 Équation de Poisson sur un demi-espace (7 pts)

On considère l'équation de Poisson, $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0$, sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$. On veut résoudre cette équation avec les conditions aux limites $u(x,y,0) = U(x,y)$, $\lim_{z\to\infty} u(x,y,z) = 0$, où $U(x,y)$ est de moyenne spatiale nulle.

Question 1 (1 pt) : Discutez l'unicité de la solution à ce problème.

Question 2 (1 pt) : On introduit la transformée de Fourier de $u(x,y,z)$ par rapport aux variables x et y, $\tilde{u}(k_x,k_y,z)$. Exprimez $\tilde{u}(k_x,k_y,z)$ et $\tilde{u}(k_x,k_y,0)$ avec la condition aux limites.

Question 3 (1 pt) : Quelle équation vérifie $\tilde{u}(k_x,k_y,z)$?

Question 4 (2 pts) : On introduit le vecteur $\boldsymbol{k} = (k_x,k_y)$ et on note sa norme $|\boldsymbol{k}| = k$. Montrez que la solution de l'équation peut s'écrire $\tilde{u}(\boldsymbol{k},z) = f_z(k)\tilde{U}(\boldsymbol{k})$, où $\tilde{f}_z(k)$ est une fonction que vous exprimerez.

Question 5 (2 pts) : La transformée de Fourier inverse de $\tilde{f}_z(k)$ est

$$f_z(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x + k_y y)}\tilde{f}_z(\boldsymbol{k})\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y = \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}. \tag{26}$$

Exprimez la solution $u(x,y,z)$ avec $f_z(x,y)$ et $U(x,y)$. Que doit valoir $\lim_{z\to 0} f_z(x,y)$?

Corrigé

Question 1 : Il s'agit de l'équation de Poisson avec des conditions au bord de Dirichlet, éventuellement à l'infini pour la variable z. Les conditions au bord « sur les côtés » dans les directions x et y ne sont pas définies. Les propriétés du cours ne permettent pas de conclure à l'unicité de la solution.

Question 2 : Par définition,

$$\tilde{u}(k_x,k_y,z) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_x x + k_y y)}u(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{27}$$

En $z = 0$, on a

$$\tilde{u}(k_x,k_y,z) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_x x + k_y y)}U(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \tilde{U}(k_x,k_y). \tag{28}$$

Question 3 : En prenant la transformée de Fourier de l'équation de Poisson, $\tilde{u}(k_x,k_y,z)$ vérifie

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\tilde{u}(\boldsymbol{k},z) = k^2\tilde{u}(\boldsymbol{k},z). \tag{29}$$

Question 4 : La solution générale est $\tilde{u}(\boldsymbol{k}, z) = \mathrm{e}^{kz} f(\boldsymbol{k}) + \mathrm{e}^{-kz} g(\boldsymbol{k})$. D'après la deuxième condition aux limites, seul le deuxième terme est acceptable et alors $g(\boldsymbol{k}) = \tilde{U}(\boldsymbol{k})$:

$$\tilde{u}(\boldsymbol{k}, z) = \mathrm{e}^{-kz} \tilde{U}(\boldsymbol{k}). \tag{30}$$

On a donc $\tilde{f}_z(k) = \mathrm{e}^{-kz}$.

D'une part, $\lim_{z\to\infty} \tilde{u}(0, z) = \tilde{U}(0)$. D'autre part, comme $\lim_{z\to\infty} u(x, y, z) = A$, $\lim_{z\to\infty} \tilde{u}(\boldsymbol{k}, z) = \frac{A}{2\pi}\delta(\boldsymbol{k})$.

Question 5 : Le produit $\tilde{u}(\boldsymbol{k}, z) = \tilde{f}_z(k)\tilde{U}(\boldsymbol{k})$, ce qui donne en espace réel un produit de convolution

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}(f_z * U)(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{z}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}} U(x', y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'. \tag{31}$$

Pour que la condition aux limites soit satisfaite, il faut que $\lim_{z\to 0} f_z(x, y) = 2\pi\delta(x)\delta(y)$.

1.9 Fonction de Green de ∇^4 (7 pts)

On cherche la fonction de Green de ∇^4 en dimension d'espace d, c'est à dire la solution de $\nabla^4 G_d = \delta$. On cherche la solution sous la forme d'une fonction isotrope $G_d(\boldsymbol{r}) = g_d(r)$, avec r la norme de $\boldsymbol{r}$. On utilisera les résultats du cours sur la fonction de Green de l'équation de Poisson, $\nabla^2 F_d = \delta$, et la méthode utilisée pour trouver ces fonctions de Green (on notera aussi $F_d(\boldsymbol{r}) = f_d(r)$).

Question 1 (2 pts) : Reliez G_d à F_d. Écrivez cette relation pour les fonctions g_d et f_d.

Question 2 (2 pts) : En utilisant les résultats du cours pour $f_d(r)$, déterminez $g_d(r)$ pour $d \notin \{2, 4\}$. Quelle est la difficulté pour la dimension $d = 4$?

Question 3 (1 pt) : Déterminez $g_4(r)$.

Question 4 (2 pts) : Déterminez $g_2(r)$ (vous pourrez factoriser les termes en $g_2(r)$ et considérer $r \mapsto r^2\log(r)$).

Corrigé

Question 1 : Par définition $\nabla^2 G_d = F_d$. Pour les fonctions de r, on peut écrire

$$g_d''(r) + \frac{d-1}{r} g_d'(r) = f_d(r). \tag{32}$$

Question 2 : Pour $d \neq 2$, on peut écrire $f_d(r) = a_d r^{d-2}$. On cherche $g_d(r)$ sous la forme $g_d(r) = b_d r^{\gamma}$. Dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$b_d\gamma(\gamma + d - 2)r^{\gamma-2} = a_d r^{2-d}, \tag{33}$$

ce qui donne $\gamma = 4 - d$, puis $b_d = a_d/[2(4-d)]$, soit

$$g_d(r) = \frac{a_d}{2(4-d)} r^{4-d}. \tag{34}$$

On donne dans le cours $a_1 = 1/2$ et $a_3 = -1/(4\pi)$.

Pour la dimension $d = 4$, l'exposant devient $\gamma = 0$ et le facteur b_d n'est pas défini.

Question 3 : Pour la dimension $d = 4$, on trouve une dépendance r^0, c'est à dire une fonction qui ne dépend pas de r : elle ne peut pas satisfaire l'équation (32). En s'inspirant de la dimension $d = 2$ du cours, on cherche une solution de la forme $g_4(r) = b\log(r)$, ce qui donne dans l'équation (32)

$$\frac{2b}{r^2} = -\frac{1}{4\pi^2 r^2}. \tag{35}$$

On obtient donc
$$g_4(r) = -\frac{\log(r)}{8\pi^2}. \tag{36}$$

Question 4 : En dimension $d = 2$, $f_2(r) = \log(r)/(2\pi)$ et l'équation (32) devient, en factorisant le côté gauche
$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r g_d'(r)\right] = \frac{\log(r)}{2\pi}. \tag{37}$$
En calculant la dérivée de $r \mapsto r^2\log(r)$, on arrive rapidement à
$$g_2(r) = \frac{r^2}{8\pi}[\log(r) - 1]. \tag{38}$$

2 Calcul variationnel

2.1 Trajectoire optimale sur la sphère

On cherche à relier deux points d'une sphère par le chemin le plus court restant sur la sphère. On utilise les coordonnées sphériques θ et ϕ pour la lattitude et la longitude, respectivement ; on utilise la convention que $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\theta = 0$ correspondant à l'équateur. On paramètre une trajectoire sur la sphère par une fonction $\theta(\phi)$.

Question 1 : Montrez que pour trouver le chemin le plus court il faut minimiser la fonctionnelle
$$I[\theta] = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\cos(\theta(\phi))^2 + \theta'(\phi)^2}\mathrm{d}\phi. \tag{39}$$

Question 2 : Quel est le lagrangien associé à cette fonctionnelle ? Montrer qu'il existe une intégrale du mouvement et la déterminer.

Question 3 : On pose $\theta = \arctan(\alpha)$, où α est une autre fonction de ϕ. On a donc $\theta' = \alpha'/(1+\alpha^2)$ et $\cos(\theta) = 1/\sqrt{1+\alpha^2}$. Montrer que
$$\alpha'(\phi)^2 + \alpha(\phi)^2 = A, \tag{40}$$
où A est une constante.

Question 4 : En dérivant la relation (40), déterminer la forme de $\theta(\phi)$.

Corrigé

Question 1 : La longueur δs associée à un déplacement $(\delta\phi, \delta\theta)$ est
$$\delta s = \sqrt{\cos(\theta)^2\delta\phi^2 + \delta\theta^2}. \tag{41}$$
En factorisant $\delta\phi$ et en écrivant $\frac{\delta\theta}{\delta\phi} = \theta'$, on obtient la forme recherchée.

Question 2 : Le lagrangien est $L(\phi, \theta, \theta') = \sqrt{\cos(\theta)^2 + \theta'^2}$. Ce lagrangien ne dépend pas explicitement de ϕ donc il existe une intégrale du mouvement qui est donnée par $L - \theta'\partial_{\theta'}L$. Il faut calculer
$$\partial_\theta' L = \frac{\theta'}{\sqrt{\cos(\theta)^2 + \theta'^2}}, \tag{42}$$
donc
$$L - \theta'\partial_{\theta'}L = \frac{\cos(\theta)^2}{\sqrt{\cos(\theta)^2 + \theta'^2}} = A. \tag{43}$$

Question 3 : Dans l'intégrale du mouvement, on obtient

$$A = \frac{\frac{1}{1+\alpha^2}}{\sqrt{\frac{1}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha'^2}{(1+\alpha^2)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2+\alpha'^2}}, \tag{44}$$

donc $\alpha^2 + \alpha'^2$ est une constante.

Question 4 : En dérivant on a $2\alpha'\alpha'' + 2\alpha\alpha' = 0$, donc $\alpha'' = -\alpha$, donc $\alpha(\phi) = B\cos(\phi + \phi_0)$ et $\theta(\phi) = \arctan(B\cos(\phi + \phi_0))$.

2.2 Inégalité de Poincaré (4 pts)

On considère le segment $[0, L]$. La norme d'une fonction f sur ce segment est définie par $\|f\|^2 = \int_0^L f(x)^2 \mathrm{d}x$. On veut montrer l'inégalité de Poincaré : « il existe une constante c_L telle que pour toute fonction f telle que $f(0) = f(L) = 0$, $\|f\| \leq c_L \|f'\|$. »

Soit f telle que $f(0) = f(L) = 0$, montrons que $\|f\| \leq c_L\|f'\|$ pour une constante c_L. On introduit la fonction $g = \frac{f}{\|f'\|}$, alors $g(0) = g(L) = 0$ et $\|g'\| = 1$; il faut donc montrer que $\|g\| \leq c_L$. Si on cherche la constante c_L optimale (la plus petite possible), on aboutit au problème suivant :

Question 1 (4 pts) : Déterminez la fonction g sur $[0, L]$ telle que $g(0) = g(L) = 0$ et $\|g'\| = 1$ et de norme maximale. Que vaut la constante c_L ? Notez que maximiser $\|g\|$ revient au même que maximiser $\|g\|^2$ et que $\|g'\|^2 = 1$.

Corrigé

Question 1 : On cherche donc à maximiser $\|g\|^2 = \int_0^L g(x)^2 \mathrm{d}x$ sous la contrainte $\int_0^L g'(x)^2 \mathrm{d}x = 1$: c'est un problème de maximisation sous contrainte facile à traiter en calcul variationnel. On maximise donc $\|g\|^2 - \lambda\|g'\|^2$; le lagrangien s'écrit donc

$$L(x, g, g') = g^2 - \lambda g'^2. \tag{45}$$

Avec $\partial_g L(x, g, g') = 2g$ et $\partial_{g'} L(x, g, g') = -2\lambda g'$, l'équation d'Euler-Lagrange donne $g = -\lambda g''$. Il n'existe pas de solution pour $\lambda \geq 0$. Pour $\lambda < 0$, la solution $A\sin(x/\sqrt{-\lambda})$ est compatible avec la condition en L seulement si $\lambda = -\left(\frac{L}{\pi n}\right)^2$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. La constante de normalisation A est choisie pour que $\|g'\| = 1$; on obtient finalement la famille de solutions

$$g_n(x) = \frac{\sqrt{2L}}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right). \tag{46}$$

Or $\|g_n\| = L/(\pi n)$: la solution correspondant à $n = 1$ a la norme maximale, et

$$c_L = \|g_1\| = \frac{L}{\pi}. \tag{47}$$

2.3 Problème de Didon (5 pts)

On considère l'aire $\mathcal{A}$ délimitée par un segment AB de longueur a et une corde de longueur ℓ fixée aux extrémités de ce segment. On suppose $a \leq \ell \leq \pi a$. Le problème de Didon consiste à trouver la courbe $y(x)$ suivie par la corde qui maximise l'aire $\mathcal{A}$.

Question 1 (3 pts) : Écrire la fonctionnelle et le langrangien associés à ce problème. Montrer que ce problème est invariant par translation et donner l'intégrale du mouvement associée. On notera λ le multiplicateur de Lagrange.

Question 2 (2 pts) : Montrer que $y(x) = \sqrt{\lambda^2 - x^2} - A$ est solution. Que vaut A ? Quelle est la forme décrite par cette fonction ? Que vaut λ quand $\ell = \pi a/2$?

Corrigé

Question 1 : On suppose que les points A et B ont respectivement pour coordonnées $(-a/2, 0)$ et $(a/2, 0)$. Ainsi, $y(x)$ est définie sur $[-a/2, a/2]$ et les conditions au bord sont $y(-a/2) = y(a/2) = 0$. Il faut maximiser l'aire $\mathcal{A} = \int_{-a/2}^{a/2} y(x)\mathrm{d}x$ sous la contrainte $\ell = \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x$; il faut donc considérer la fonctionnelle $I[y] = \int_{-a/2}^{a/2} L(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x$ avec le lagrangien

$$L(x, y, y') = y - \lambda\sqrt{1 + y'^2}. \tag{48}$$

Le lagrangien ne dépend pas explicitement de x, donc $y'\partial_{y'}L - L$ est une intégrale du mouvement. Comme $\partial_{y'}L = -\lambda y'/\sqrt{1 + y'^2}$, $y'\partial_{y'}L - L = \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} - y$:

$$A = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} - y(x). \tag{49}$$

On aurait aussi pu utiliser l'équation d'Euler-Lagrange mais on aurait obtenu une équation plus difficile à intégrer. Comme les conditions au bord sont des conditions de Dirichlet, la minimisation ne donne pas d'équation supplémentaire au bord.

Question 2 : On montre facilement que la forme proposée est solution en utilisant $1 + y'(x)^2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - x^2}$. Les conditions aux limites imposent $B = \sqrt{\lambda^2 - \frac{a^2}{4}}$. L'équation proposée décrit un cercle de rayon λ. Quand $a = \pi\ell$, la solution est un demi-cercle : $\lambda = a$.

2.4 Trajectoire dans une fibre optique à gradient d'indice (5 pts)

On considère une fibre optique à gradient d'indice. On note z la coordonnée le long de l'axe de la fibre et x et y les coordonnées transverses. L'indice optique dans la fibre est donné par $n(r) = n_0\left(1 - \frac{r^2}{2r_0^2}\right)$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et n_0 et r_0 sont des paramètres de la fibre. On cherche à déterminer la trajectoire $y(z)$ d'un rayon lumineux dans le plan (y, z).

Question 1 (5 pts) : Montrez que sous certaines approximations que vous déterminerez, la trajectoire du rayon lumineux est une sinusoïde dont vous déterminerez les paramètres.

Corrigé

Question 1 : Il faut minimiser la longueur optique

$$I[y] = \int n(y(z))\sqrt{1 + y'(z)^2}\mathrm{d}z. \tag{50}$$

Le lagrangien associé est $L(y, y') = n(y)\sqrt{1 + y'^2}$; il ne dépend pas explicitement de z, il y a donc une intégrale du mouvement, $y'\partial_{y'}L - L = -\frac{n(y)}{\sqrt{1+y'^2}} = -A$, où A est une constante. On obtient alors

$$y'^2 = \left(\frac{n(y)}{A}\right)^2 - 1 = \left(\frac{n_0}{A}\right)^2\left(1 - \frac{y^2}{2r_0^2}\right)^2 - 1. \tag{51}$$

En faisant l'approximation de déviation faible par rapport à l'axe, $|y| \ll r_0$, on peut développer le carré à droite :

$$y'^2 = \left(\frac{n_0}{A}\right)^2 - 1 - \left(\frac{n_0}{A}\right)^2\frac{y^2}{r_0^2} = \ell^{-2}\left[y_{\max}^2 - y(z)^2\right], \tag{52}$$

où on a posé $\ell = Ar_0/n_0$ et $y_{\max} = r_0\sqrt{1-\left(\frac{A}{n_0}\right)^2}$. Il s'agit d'un oscillateur harmonique où y' correspond à l'énergie cinétique et y^2 à l'énergie potentielle, alors que $y_{\max}$ donne l'énergie totale. La solution est de la forme

$$y(z) = y_{\max} \cos\left(\frac{z}{\ell}\right). \tag{53}$$

On note que la période ℓ dépend de l'amplitude du mouvement :

$$\ell = r_0\sqrt{1-\left(\frac{y_{\max}}{r_0}\right)^2}. \tag{54}$$

Toutefois la dépendance est faible car $y_{\max} \ll r_0$.

2.5 Forme d'une poutre pesante encastrée (5 pts)

On considère une poutre de longueur L, de module de courbure B et de masse linéique ρ encastrée horizontalement dans un mur rigide. On cherche à déterminer la forme de la poutre. On note $y(x)$ sa hauteur à l'abscisse x. L'énergie de la poutre est donnée par

$$U[y] = \int_0^L \left[\frac{B}{2}y''(x)^2 + \rho g y(x)\right] \mathrm{d}x, \tag{55}$$

et l'encastrement impose $y(0) = y'(0) = 0$.

Question 1 (3 pts) : Donnez l'équation différentielle satisfaite par la hauteur et les conditions aux limites.

Question 2 (2 pts) : Déterminez la forme de la poutre. Donnez $y(L)$.

Corrigé

Question 1 : Calculons l'énergie de $x \mapsto y(x) + \epsilon(x)$ au premier ordre en $\epsilon(x)$. Après deux intégrations par parties, on trouve

$$U[y+\epsilon] - U[y] = \int_0^L \left[By^{(4)}(x) + \rho g\right] \epsilon(x)\mathrm{d}x + B\left[y''(x)\epsilon'(x)\right]_0^L - B\left[y^{(3)}(x)\epsilon(x)\right]_0^L. \tag{56}$$

Pour y solution, tous ces termes doivent être nuls. L'intégrale donne l'équation différentielle satisfaite par y :

$$y^{(4)}(x) = -\frac{\rho g}{B}. \tag{57}$$

En $x = 0$, les conditions aux limites imposent $\epsilon(0) = \epsilon'(0) = 0$. En $x = L$, il n'y a pas cette contrainte et il faut alors avoir $y''(L) = y^{(3)}(L) = 0$.

Question 2 : Par intégrations successives, on trouve

$$y(x) = -\frac{\rho g}{24B}\left(x^4 - 4x^3L + 6x^2L^2\right). \tag{58}$$

En particulier, $y(L) = -\rho g L^4/(8B)$.

2.6 Équation d'un ménisque (3 pts)

On considère une interface liquide-air décrite par sa hauteur $h(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{r} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$; son énergie est donnée par

$$\int \left[\frac{\rho g}{2}h(\boldsymbol{r})^2 + \gamma\sqrt{1+(\nabla h(\boldsymbol{r}))^2}\right] \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{59}$$

où ρ est la densité du fluide, g est l'accélération de la pesanteur et γ est la tension de surface.

Question 1 (1 pt) : Quelle équation aux dérivées partielles vérifie la hauteur $h(\boldsymbol{r})$? On introduira la longueur gravito-capillaire $\ell = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$.

Question 2 (2 pts) : En supposant que l'interface a une symétrie cylindrique, $h(\boldsymbol{r}) = h(r)$, quelle est l'équation vérifiée par $h(r)$? On donne $\nabla \cdot \boldsymbol{e}_r = 1/r$ en dimension 2. Linéarisez cette équation en supposant que $|h'(r)| \ll 1$.

Corrigé

Question 1 : Il suffit d'écrire l'équation d'Euler-Lagrange associée au lagrangien $L(\boldsymbol{r}, h, \nabla h) = \frac{\rho g}{2} h^2 + \gamma\sqrt{1 + (\nabla h)^2}$, qui est

$$\partial_h L = \nabla \cdot \nabla_{\nabla h} L \tag{60}$$

avec

$$\partial_h L = \rho g h, \tag{61}$$

$$\nabla_{\nabla h} L = \gamma \frac{\nabla h}{\sqrt{1 + (\nabla h)^2}}. \tag{62}$$

Ainsi

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla h}{\sqrt{1 + (\nabla h)^2}} \right) = \frac{h}{\ell^2}. \tag{63}$$

Question 2 : $\nabla h(\boldsymbol{r}) = h'(r)\boldsymbol{e}_r$, donc

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla h}{\sqrt{1 + (\nabla h)^2}} \right) = \left(\frac{h'}{\sqrt{1 + h'^2}} \right)' + \frac{h'}{r\sqrt{1 + h'^2}} = \frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}} + \frac{h'}{r\sqrt{1 + h'^2}}. \tag{64}$$

après un court calcul. L'équation est donc

$$\frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}} + \frac{h'}{r\sqrt{1 + h'^2}} = \frac{h}{\ell^2}. \tag{65}$$

Quand $|h'| \ll 1$ on obtient

$$h'' + \frac{h'}{r} = \frac{h}{\ell^2}. \tag{66}$$

3 Probabilités

3.1 Durée de vie d'un circuit électronique (3 pts)

On considère un circuit électronique constitué de N composants. La durée de vie du composant n, X_n, est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ_n ; les durées de vie des différents composants sont indépendantes. La durée de vie du circuit Y est égale au minimum des durées de vie des composants : $Y = \min_n(X_n)$.

Question 1 (1 pt) : Quelle est l'espérance de la durée de vie du composant n, $t_n = \mathrm{E}(X_n)$ (faîtes le calcul) ?

Question 2 (2 pts) : Montrez que la durée de vie du circuit est une variable aléatoire exponentielle et donnez son paramètre. Exprimez l'espérance de la durée de vie du circuit, $t_\mathrm{c} = \mathrm{E}(Y)$, en fonction des durées de vie des différents composants.

Corrigé

Question 1 : $t_n = 1/\lambda_n$.

Question 2 : La loi exponentielle est définie par $\mathrm{P}(X_n \geq x) = \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$. Donc

$$\mathrm{P}(Y \geq x) = \mathrm{P}(\cap_{i=1}^{N}[X_i \geq x]) = \prod_{i=1}^{N} \mathrm{P}(X_i \geq x) = \prod_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{-\lambda_i x} = \exp\left(-\left[\sum_{i=1}^{N} \lambda_i\right] x\right). \tag{67}$$

Y suit donc une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$ et la durée de vie du circuit est

$$t_{\mathrm{c}} = \left(\frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right)^{-1}. \tag{68}$$

3.2 Maximum de variables aléatoires uniformes (4 pts)

On considère des variables aléatoires uniformes sur l'intervalle $[0,1]$ et indépendantes $(X_i)_{i \in \mathbb{N}_+^*}$. On pose $Y_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

Question 1 (4 pts) : Déterminez l'espérance $\mathrm{E}[Y_n]$ et commentez le résultat obtenu.

Corrigé

Question 1 : La fonction de répartition de X_i vaut $F_X(x) = x$ sur l'intervalle $[0,1]$. La fonction de répartition du maximum vaut $F_{Y_n}(x) = F_X(x)^n = x^n$, sa loi est donc $f_{Y_n}(x) = nx^{n-1}$ sur l'intervalle $[0,1]$, et elle est nulle en-dehors. L'espérance vaut

$$\mathrm{E}[Y_n] = \int_0^1 x f_{Y_n}(x) \mathrm{d}x = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}. \tag{69}$$

On a $\mathrm{E}[Y_n] \underset{n\to\infty}{\to} 1$, comme attendu.

3.3 Maximum de variables aléatoires uniformes : convergence et tirage aléatoire (6 pts)

On considère des variables aléatoires uniformes sur l'intervalle $[0,1]$ et indépendantes $(X_i)_{i \in \mathbb{N}_+^*}$. On pose $Y_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

Question 1 (3 pts) : Déterminez la loi de Y_n.

Question 2 (2 pts) : Montrez que Y_n converge en moyenne vers une variable aléatoire certaine.

Question 3 (1 pt) : On peut générer numériquement des tirages de la variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, que l'on note R. Quelle fonction g appliquer à R pour que $g(R)$ suive la loi de Y_n ? Tracez l'allure de la fonction g pour différentes valeurs de n et commentez-les.

Corrigé

Question 1 : La fonction de répartition de X_i vaut $F_X(x) = x$ sur l'intervalle $[0,1]$. La fonction de répartition du maximum vaut $F_{Y_n}(x) = F_X(x)^n = x^n$, sa loi est donc $f_{Y_n}(x) = nx^{n-1}$ sur l'intervalle $[0,1]$, et elle est nulle en-dehors.

Question 2 : On calcule $\mathrm{E}[Y_n] = 1 - \frac{1}{n+1}$. On a donc $\mathrm{E}[|Y_n - 1|] = \mathrm{E}[1 - Y_n] = 1 - \mathrm{E}[Y_n] = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$: Y_n converge en moyenne vers 1.

Question 3 : D'après le cours g est la fonction réciproque de la fonction de répartition de Y_n, $F_X(x) = x^n$. Il faut donc prendre $g(x) = x^{1/n}$. On voit que $g(x)$ s'approche de 1 quand n augmente.

3.4 Ordre de deux variables aléatoires uniformes (3 pts)

X est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$ et Y est une variable aléatoire uniforme sur $[0,\alpha]$, $\alpha \in [0,1]$; X et Y sont indépendantes.

Question 1 (3 pts) : Quelle est la probabilité $\mathrm{P}(X \geq Y)$?

Corrigé

Question 1 : Le plus simple est de le faire avec les probabilités conditionnelles :

$$\mathrm{P}(X \geq Y) = \mathrm{P}(X \geq Y | X > \alpha)\mathrm{P}(X > \alpha) + \mathrm{P}(X \geq Y | X \leq \alpha)\mathrm{P}(X \leq \alpha) = 1 \times (1-\alpha) + \frac{1}{2} \times \alpha = 1 - \frac{\alpha}{2}. \quad (70)$$

3.5 Suite de variables aléatoires de Bernouilli (6 pts)

On considère des variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Bernouilli, indépendantes et de même paramètre $p = \mathrm{P}(X_n = 1)$.

Question 1 (2 pts) : Calculez la fonction caractéristique $G_{X_n}(s)$ d'une variable aléatoire X_n et la fonction caractéristique d'une variable aléatoire A de Poisson de paramètre λ, en utilisant la fonction caractéristique adaptée aux variables aléatoires à valeurs entières.

Question 2 (2 pts) : On considère la variable aléatoire $Y_N = \sum_{n=1}^N X_n$. Quelle est sa fonction caractéristique ? Quelle est la loi de Y_N dans la limite $N \to \infty$ avec $p = \alpha/N$?

Question 3 (2 pts) : On considère cette fois que p ne dépend pas de N. On introduit $W_N = a_N Y_N + b_N$. Comment choisir a_N et b_N pour que W_N tende en loi vers une loi normale centrée réduite quand $N \to \infty$?

Corrigé

Question 1 : $G_{X_n}(s) = \sum_{k=0}^\infty \mathrm{P}(X_n = k)s^k = 1 - p + ps$. $G_A(s) = \exp(\lambda(s-1))$.

Question 2 : $G_Y(s) = (1-p+ps)^N$. $[1+\alpha(s-1)/N]^N \to \exp(\alpha(s-1))$: c'est une loi de Poisson de paramètre α.

Question 3 : D'après le théorème de la limite centrale il faut considérer

$$W_N = \frac{Y_N - \mathrm{E}(Y_N)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_N)}} = \frac{Y_N - N\mathrm{E}(X_1)}{\sqrt{N\,\mathrm{Var}(X_1)}} = \frac{Y_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} = \frac{Y_N}{\sqrt{Np(1-p)}} - \sqrt{\frac{Np}{1-p}}, \quad (71)$$

soit $a_N = 1/\sqrt{Np(1-p)}$ et $b_N = -\sqrt{\frac{Np}{1-p}}$.

3.6 Nombre de photons détectés derrière un miroir semi-réfléchissant (6 pts)

Un laser envoie N photons sur un miroir réfléchissant, où N est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. À chaque photon n est associé une variable aléatoire de Bernouilli X_n valant 1 si le photon est transmis ($\mathrm{P}(X_n = 1) = p$) et 0 s'il est réfléchi par le miroir. Les photons sont indépendants les uns des autres. Le nombre de photons transmis est $T = \sum_{n=1}^N X_n$.

Question 1 (2 pts) : Calculez la fonction caractéristique du nombre de photons envoyés, $G_N(s) = \mathrm{E}(s^N)$, et la fonction caractéristique de la variable X_n, $g(s) = \mathrm{E}(s^{X_n})$.

Question 2 (4 pts) : Exprimez la fonction caractéristique du nombre de photons transmis $G_T(s)$ en fonction de $G_N(s)$ et $g(s)$. Quelle loi suit la variable aléatoire T ?

Corrigé

Question 1 : $g(s) = \mathrm{E}(s^{X_n}) = ps + 1 - p = 1 + p(s-1)$ et

$$G(s) = \mathrm{E}(s^N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} s^n = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)}. \tag{72}$$

Question 2 : Calculons

$$\begin{aligned}
G_T(s) = \mathrm{E}(s^T) &= \mathrm{E}\left(s^{\sum_{n=1}^{N} X_n}\right) &(73)\\
&= \mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{k,N} s^{\sum_{n=1}^{N} X_n}\right) &(74)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}\left(\delta_{k,N} s^{\sum_{n=1}^{k} X_n}\right) &(75)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}(\delta_{k,N}) \mathrm{E}\left(s^{\sum_{n=1}^{k} X_n}\right) &(76)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(N = k) g(s)^k &(77)\\
&= \mathrm{E}(g(s)^N) &(78)\\
&= G_N(g(s)). &(79)
\end{aligned}$$

On a utilisé l'indépendance de N et des (X_n). Ainsi

$$G_T(s) = \exp\left(\lambda[1 + p(s-1) - 1]\right) = \exp\left(\lambda p[s-1]\right), \tag{80}$$

c'est la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.