

SYSTÈMES LINÉAIRES, SIGNAUX ET BRUIT

Vincent Démery

Version : 12 octobre 2020

Table des matières

Table des matières	5
Introduction	7
I Systèmes linéaires	9
1 Système Linéaire Invariant (SLI)	11
1.1 Définitions	11
1.1.1 Système linéaire invariant	11
1.1.2 Exemples	11
1.1.3 Causalité et stabilité	12
1.2 Caractérisation par la réponse impulsionnelle	12
1.2.1 Distribution de Dirac et convolution	12
1.2.2 Réponse impulsionnelle et réponse générale	13
1.2.3 Causalité et stabilité	14
1.2.4 Exemples	15
1.3 SLI décrit par une équation différentielle	15
1.3.1 Équation du système	15
1.3.2 Forme générale de la solution, stabilité, causalité	16
2 Transformations des systèmes linéaires	17
2.1 Fonctions propres d'un SLI	17
2.2 Transformée de Fourier	17
2.2.1 Définition	17
2.2.2 Propriétés	18
2.2.3 Application aux SLI	19
2.2.4 Représentations de la fonction de transfert d'un système temporel	20
2.3 Transformée de Laplace	20
2.3.1 Définition	20
2.3.2 Propriétés	20
2.3.3 Transformées classiques	21
2.3.4 Application aux SLI	22
2.4 SLI décrit par une équation différentielle	22
2.4.1 Approche par transformée de Fourier	22

2.4.2	Approche par transformée de Laplace	23
II	Signaux	25
3	Représentation et manipulation de signaux par transformée de Fourier	27
3.1	Définition et propriétés élémentaires	27
3.1.1	Énergie dissipée dans un fluide complexe	28
3.2	Signaux et distributions de base	28
3.3	Relation d'incertitude	29
3.3.1	Énergie, position moyenne et largeur d'un signal	30
3.3.2	Relation d'incertitude	30
3.3.3	Application à l'inégalité de Heisenberg	31
3.4	Relation de Kramers-Kronig	32
3.5	Applications de la multiplication de signaux	32
3.5.1	Transmission radio par modulation d'amplitude	32
3.5.2	Résonance magnétique nucléaire	32
3.6	Séries de Fourier	33
3.6.1	Différentes « versions » de la transformée de Fourier	33
3.6.2	Définition	34
3.6.3	Lien avec la transformée de Fourier	36
4	Échantillonnage	39
4.1	Échantillonnage infiniment long	39
4.1.1	Signal échantillonné et transformée de Fourier	39
4.1.2	Échantillonnage sans perte d'information	40
4.2	Échantillonnage en temps fini	42
4.2.1	Observation d'un signal continu pendant un temps fini	42
4.2.2	Transformée de Fourier Discrète (TFD)	42
4.2.3	Signal échantillonné fini et transformée de Fourier	44
4.2.4	Transformée en Z	44
4.3	Estimation d'une TF à l'aide d'une TFD	45
4.3.1	Conditions pour une estimation correcte	45
4.3.2	Exemples	45
III	Bruit	47
5	Signaux aléatoires	49
5.1	Définition	49
5.2	Description statistique	49
5.3	Invariance et ergodicité	51
6	Propriétés spectrales des signaux aléatoires	53
6.1	Densité spectrale de puissance d'un signal déterministe	53

6.2	Densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire stationnaire	54
6.3	Filtrage linéaire d'un signal aléatoire	55
7	Exemples	57
7.1	Bruit blanc	57
7.2	Bruit rose	57
7.3	Détection synchrone	57
7.3.1	Mesure à temps fixé	58
7.3.2	Intégration temporelle	58
7.3.3	Détection synchrone	58
7.3.4	Envoi d'un signal $V(t)$	59
7.4	Somme de signaux aléatoires, interférences	59

Introduction

L'objectif de ce cours est de familiariser les étudiants avec les notions et outils relatifs aux systèmes linéaires, et à la représentation et à la manipulation des signaux déterministes et aléatoires. Les outils techniques pré-requis (transformation de Fourier et de Laplace, théorie des distributions. . .) sont abordés dans le cours de Méthodes Mathématiques de 1^{ère} année. Le cours tente d'introduire de manière aussi unifiée que possible des notions communes à de nombreuses matières, notions qui seront par la suite souvent appréhendées avec des points de vue ou des terminologies qui diffèrent selon le contexte.

La première partie introduit les systèmes linéaires invariants par translation dans le temps ou l'espace. On montre en particulier que de tels systèmes sont entièrement caractérisés dans l'espace physique (temps ou espace) par leur réponse impulsionnelle, ou dans un espace transformé (Fourier ou Laplace) par leur fonction de transfert. Cette première partie se termine par des exemples concrets de systèmes linéaires qui seront rencontrés tout au long de la scolarité (phénomène de propagation d'onde, commande de processus, circuit électronique, imagerie, etc.).

La seconde partie concerne la représentation et la manipulation des signaux dans le domaine de Fourier. La transformation de Fourier est présentée d'une part comme un outil de calcul, mais aussi comme un outil de représentation fréquentielle des signaux, représentation naturelle et intuitive pour la description de nombreux phénomènes physiques. On s'y intéresse ensuite aux effets d'échantillonnage lors de la mesure de signaux continus, que ce soit par la période d'échantillonnage ou la durée totale de l'observation. On démontre le théorème de Shannon-Nyquist sur l'échantillonnage idéal.

La troisième partie discute les signaux aléatoires, dans l'espace réel, les fonctions de corrélations sont introduites avec les notions d'invariance et de stationnarité. Ensuite, les signaux aléatoires sont caractérisés dans l'espace de Fourier via leur densité spectrale de puissance et le théorème de Wiener-Khinchin est démontré.

Ces notes sont largement inspirées de celles d'Emmanuel Bossy, elles-mêmes basées sur des notes rédigées par des élèves de la 125^{ème} promotion, Pierrick Cavalié, Matthieu Pebayle et Charles Bourdil. Je remercie par avance ceux qui voudront bien me transmettre leurs corrections ou remarques.

Première partie

Systemes linéaires

Chapitre 1

Système Linéaire Invariant (SLI)

1.1 Définitions

1.1.1 Système linéaire invariant

On appelle *signal* une fonction d'une variable temporelle t ou spatiale \mathbf{r} . Pour simplifier les notations, on intégrera le temps aux variables d'espace pour les signaux dépendants de ces deux variables. Un système \mathcal{H} associe à un signal d'entrée e un signal de sortie s , qui dépend des mêmes variables que e :

$$e \xrightarrow{\mathcal{H}} s = \mathcal{H}[e]. \quad (1.1)$$

Le signal de sortie s est la *réponse* au signal d'entrée e .

Linéarité : un système \mathcal{H} est linéaire quand sa réponse à une combinaison linéaire de signaux d'entrée est égale à la même combinaison linéaire des réponses individuelles à chacun des signaux d'entrées :

$$\forall(\alpha_1, \alpha_2) \text{ et } \forall(e_1, e_2), \mathcal{H}[\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2] = \alpha_1 \mathcal{H}[e_1] + \alpha_2 \mathcal{H}[e_2]$$

Invariance : un système \mathcal{H} est invariant quand une translation du signal d'entrée se traduit par la même translation du signal de sortie :

$$\forall t_0, \quad \mathcal{H}[e(t)] = s(t) \implies \mathcal{H}[e(t - t_0)] = s(t - t_0). \quad (1.2)$$

Pour un système invariant, l'origine des coordonnées est sans importance vis-à-vis des propriétés du système.

On s'intéresse dans ce cours aux systèmes qui vérifient ces deux propriétés, les systèmes linéaires invariants (SLI).

1.1.2 Exemples

1.1.2.1 Circuit RC

On considère le circuit résistance-condensateur représenté en Fig. 1.1, qui associe à une tension d'entrée $V_e(t)$ la tension de sortie $V_s(t)$. Ici, \mathcal{H} est un système linéaire car la résistance et le condensateur relient linéairement le courant qui les traverse à la tension à leurs bornes (par des opérateurs de dérivation). Il est de plus invariant si l'on suppose que les composants sont stables au cours du temps. C'est un système linéaire invariant minimal que nous utiliserons pour discuter des propriétés générales de ces systèmes.

Ce système est caractérisé par l'équation différentielle reliant la tension de sortie à la tension d'entrée :

$$\tau \frac{dV_s}{dt}(t) + V_s(t) = V_e(t), \quad (1.3)$$

où $\tau = RC$. Pour un circuit RC classique, $\tau > 0$, mais on peut envisager le cas plus général où le signe de τ est libre (cela peut être réalisé avec un montage de « résistance négative » à amplificateur opérationnel).

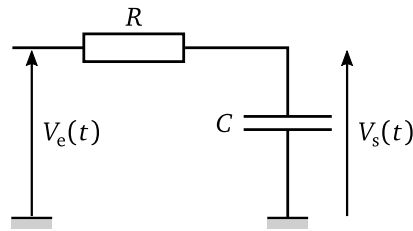


FIGURE 1.1 – Schéma du système résistance (R) - condensateur (C).

1.1.2.2 Fluide complexe

Le deuxième exemple que l'on considère est un fluide complexe cisailé. On considère le cisaillement $\gamma(t)$ comme le signal d'entrée et la contrainte en cisaillement $\sigma(t)$ comme le signal de sortie. On se place dans un régime de faible cisaillement où la relation est linéaire.

Pour un fluide newtonien de viscosité η , la relation entre cisaillement et contrainte est $\sigma(t) = \eta\dot{\gamma}(t)$. Pour un solide de module d'Young E , $\sigma(t) = E\gamma(t)$. Les fluides viscoélastiques peuvent combiner les deux types de réponses.

1.1.3 Causalité et stabilité

Il existe plusieurs définitions de la stabilité d'un système. Dans le cadre de ce cours, on considère la définition suivante (dite « BIBO » pour « Bounded Input \Rightarrow Bounded Output ») :

Système stable : un système est stable si toute entrée bornée induit une sortie bornée.

Système causal : un système temporel \mathcal{H} est causal si une entrée nulle avant t_0 produit une sortie nulle avant t_0 :

$$\forall t_0, [\forall t \leq t_0, e(t) = 0] \implies [\forall t \leq t_0, s(t) = \mathcal{H}[e(t)] = 0]. \quad (1.4)$$

1.2 Caractérisation par la réponse impulsionnelle

1.2.1 Distribution de Dirac et convolution

Distribution de Dirac δ : Soit f une fonction d'intégrale 1, on définit $f_n : t \mapsto nf(nt)$. La distribution de Dirac δ est la limite

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n. \quad (1.5)$$

Un tel objet n'existe pas au sens des fonctions, mais seulement au sens des distributions. Sa définition rigoureuse, permettant une manipulation correcte et compréhensible dans des cas plus complexes que ceux abordés dans ce cours, est vue en cours de Méthodes Mathématiques. La définition donnée ci-dessus sera suffisante pour ce cours.

Exemple : la fonction f de départ peut être la fonction porte $\Pi(t) = \chi_{[-1/2, 1/2]}(t)$, i.e., la fonction indicatrice de l'intervalle $[-1/2, 1/2]$, ou une gaussienne, $f(t) = e^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi}$.

La propriété suivante est équivalente à la définition (en fait, il s'agit de la « vraie » définition) :

Pour toute fonction continue à support compact f ,

$$\int \delta(t - t_0)f(t)dt = f(t_0), \quad \forall t_0. \quad (1.6)$$

Démonstration : Prenons une fonction g d'intégrale 1, alors, par définition

$$\int \delta(t - t_0) f(t) dt = \int \lim_{n \rightarrow \infty} n g(n[t - t_0]) f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g(u) f\left(\frac{u}{n} + t_0\right) du, \quad (1.7)$$

où l'on a allègrement inversé limite et intégrale et utilisé le changement de variables $u = n(t - t_0)$. La limite simple de l'intégrande est $g(u)f(t_0)$. Comme f est à support compact, donc majorée, on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour arriver au résultat recherché. \square

Cette propriété permet une manipulation aisée de la distribution δ basée sur la plupart des propriétés du calcul intégral (linéarité, changement de variable, intégration par partie, etc.) sans recourir au formalisme de la théorie des distributions.

On introduit le *produit de convolution* de deux fonctions f et g :

$$f * g(t) = \int f(t - t') g(t') dt'. \quad (1.8)$$

Un changement de variable permet de montrer que le produit de convolution est commutatif, *i.e.*, $f * g = g * f$. L'équation (1.6), avec la propriété $\delta(t) = \delta(-t)$, implique immédiatement que la distribution de Dirac est l'élément neutre pour la convolution :

$$\delta * g(t) = g(t). \quad (1.9)$$

Finalement, la formule (1.6) peut aussi s'interpréter de la façon suivante : toute fonction $f(t)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire « continue » (c'est à dire définie par une intégrale) de distributions de Dirac translattées.

1.2.2 Réponse impulsionnelle et réponse générale

Réponse impulsionnelle : La réponse impulsionnelle h d'un SLI est la réponse à une entrée donnée par la distribution de Dirac δ :

$$h = \mathcal{H}[\delta]. \quad (1.10)$$

Deux types de situations peuvent se présenter :

- La réponse impulsionnelle tend vers une distribution, telle qu'une distribution de Dirac ou ses dérivées ; la réponse impulsionnelle n'est pas alors une fonction mais une distribution. Par exemple, la propagation sans déformation d'une onde d'un point à un autre peut-être décrite par un simple opérateur de retard, qui décale simplement le signal.
- La réponse impulsionnelle est une fonction (système RLC en électricité, fonction de diffraction en optique ou acoustique). C'est le cas que nous rencontrerons le plus fréquemment.

Réponse à une entrée quelconque : La réponse s d'un SLI à une entrée e quelconque s'obtient à partir de la réponse impulsionnelle $h = \mathcal{H}[\delta]$ par un produit de convolution :

$$s = \mathcal{H}[e] = h * e. \quad (1.11)$$

Démonstration :

$$e(t) = \int \delta(t - t') e(t') dt', \quad (1.12)$$

donc

$$s(t) = \mathcal{H}[e(t)] = \mathcal{H}\left[\int \delta(t - t') e(t') dt'\right], \quad (1.13)$$

$$= \int \mathcal{H}[\delta(t - t')] e(t') dt', \quad (1.14)$$

$$= \int h(t - t') e(t') dt', \quad (1.15)$$

$$= h * e(t). \quad (1.16)$$

□

La réponse impulsionnelle joue donc un rôle crucial car elle permet de connaître la réponse à n'importe quel signal d'entrée. Dans le contexte des équations aux dérivées partielles, qui seront étudiées plus en détail dans le cours de Méthodes Mathématiques de 2^{ème} année, on l'appelle *solution fondamentale* ou *fonction de Green* du système.

Pour un SLI temporel, on définit aussi la *réponse indicielle*, qui est la réponse à une entrée donnée par la fonction de Heaviside $\theta(t)$. Elle peut se déduire de la réponse impulsionnelle par

$$\mathcal{H}[\theta](t) = h * \theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')\theta(t')dt' = \int_0^{\infty} h(t-t')dt'. \quad (1.17)$$

1.2.3 Causalité et stabilité

Comme la réponse d'un SLI est entièrement caractérisée par sa réponse impulsionnelle h , la causalité est équivalente à une condition sur la réponse impulsionnelle :

Un système est causal si et seulement si sa réponse impulsionnelle h vérifie $h(t) = 0 \forall t \leq 0$.

Démonstration :

⇒ La réponse impulsionnelle est la réponse à une distribution de Dirac, qui est nulle pour $t < 0$, il suffit ensuite d'utiliser la causalité.

⇐ Supposons que $h(t) = 0$ pour $t < 0$. Soit $e(t)$ un signal d'entrée nul avant t_0 . On veut montrer que $s(t)$ possède la même propriété. D'après l'équation (1.11), la sortie s'écrit

$$s(t) = h * e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')e(t')dt'. \quad (1.18)$$

Comme $e(t) = 0$ pour $t < t_0$ et $h(t) = 0$ pour $t < 0$, on peut restreindre le domaine d'intégration à $] -\infty, t] \cap [t_0, \infty[$. Si $t < t_0$, ce domaine est vide donc l'intégrale est nulle, donc $s(t) = 0$. □

Remarque : pour un système causal, on peut restreindre le domaine d'intégration :

$$s(t) = \int_{t_0}^t h(t-t')e(t')dt' \quad (1.19)$$

si le signal d'entrée est nul avant t_0 . Cette expression traduit que la réponse d'un système causal à l'instant t met en jeu les valeurs de l'excitation depuis le moment où elle a commencé jusqu'à l'instant présent t .

La stabilité est équivalente à une propriété de la réponse impulsionnelle h :

Un système est stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle h vérifie $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$

Démonstration :

⇒ On choisit l'entrée bornée $e(t) = \text{sgn}(h(-t))$, la sortie $s = h * e$ est donc bornée, et

$$s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(-t)\text{sgn}(h(-t))dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt. \quad (1.20)$$

⇐ Soit une entrée bornée $e(t)$: il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|e(t)| \leq M \forall t$. Alors la sortie vérifie

$$|s(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')e(t')dt' \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-t')| \times |e(t')|dt' \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(t')|dt'. \quad (1.21)$$

□

1.2.4 Exemples

1.2.4.1 Circuit RC, lien entre causalité et stabilité

Commençons par déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ du circuit RC ; elle est solution de l'équation

$$\tau \dot{h}(t) + h(t) = \delta(t). \quad (1.22)$$

Résolvons cette équation « à la main ». Sur $] -\infty, 0[$ et $]0, \infty[$, la solution vérifie $\tau \dot{h}(t) + h(t) = 0$ et est donc de la forme $h(t) = a_{\pm} \exp(-t/\tau)$ sur \mathbb{R}_{\pm}^* . L'impulsion de Dirac agit comme terme source et est absorbée par la dérivée la plus haute ; en intégrant l'équation entre 0^- et 0^+ , on arrive à $\tau[h(0^+) - h(0^-)] = 1$. Avec la forme précédente, cette relation devient $a_+ - a_- = 1/\tau$. La solution générale est donc

$$h(t) = \left[a_- + \frac{1}{\tau} \theta(t) \right] e^{-t/\tau}, \quad (1.23)$$

où $\theta(t)$ est la fonction de Heaviside.

Comme attendu pour une équation du second ordre sans condition aux limites, cette solution a un degré de liberté, la constante a_- . Toutefois, nous avons évoqué plus haut « la » réponse impulsionnelle, sous-entendant qu'elle était unique. En particulier, la causalité et la stabilité, qui peuvent être déterminées par la réponse impulsionnelle, dépendent de a_- . Par exemple, en prenant $a_- = 0$, on obtient une réponse impulsionnelle « causale », c'est à dire nulle aux temps négatifs : on peut donc choisir d'avoir une réponse causale, qui est $h(t) = \tau^{-1} \theta(t) \exp(-t/\tau)$. Regardons ce qui se passe pour la stabilité.

Quand $\tau > 0$, la réponse causale est bornée et intégrable, ce qui correspond à un système stable. Quand $\tau < 0$, la réponse causale diverge en l'infini et n'est donc pas intégrable, ce qui correspond à un système instable. En revanche, on peut aussi considérer le cas $a_- = -1/\tau$, qui donne $h(t) = -\tau^{-1} \theta(-t) \exp(-t/\tau)$: elle est intégrable mais non-nulle pour les temps négatifs, ce qui correspond à un système stable mais non causal.

En conclusion, dans le cas $\tau > 0$ il existe une réponse causale et stable, et dans le cas $\tau < 0$, il existe une solution causale et une solution stable, distinctes. On en déduit que causalité et stabilité ne sont pas indépendantes : on peut dire d'un système qu'il est « stable et causal », mais dire qu'un système est « stable mais pas causal », ou « causal mais pas stable » n'a aucun sens. Cette conclusion est en fait générale à tous les systèmes linéaires invariants. Nous verrons comment apparaissent les réponses stables mais non causales ou causales mais non stables avec les transformées de Fourier et de Laplace.

1.2.4.2 Mémoire d'un fluide complexe

La réponse impulsionnelle d'un fluide complexe est sa fonction de mémoire $\Gamma(t)$. En supposant le système causal, on peut donc écrire la contrainte comme

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \Gamma(t-t') \gamma(t') dt'. \quad (1.24)$$

1.3 SLI décrit par une équation différentielle

Discutons maintenant en toute généralité des SLI décrit par une équation différentielle, et voyons comment généraliser la discussion du circuit RC en Sec. 1.2.4.1.

1.3.1 Équation du système

SLI décrit par une équation différentielle à coefficients constants : l'équation qui relie le signal d'entrée e au signal de sortie s est de la forme

$$\sum_{n=0}^q a_n s^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^r b_n e^{(n)}(t). \quad (1.25)$$

La linéarité d'un système décrit par une telle équation est assurée de manière évidente par la linéarité même de l'équation. De même, l'équation est invariante par translation dans le temps car les coefficients (a_n) et (b_n) sont indépendants du temps.

Dans le cadre de ce cours, on suppose que $r < q$. On admet que cette condition est nécessaire pour un système physiquement réalisable. Par exemple, un système dérivateur, décrit par $s(t) = \frac{de(t)}{dt}$ n'est pas réalisable. Dans le cadre d'un circuit électrique à éléments passifs, il faudrait pour avoir un tel système que les composants n'aient aucune résistance, ce qui est irréalisable en pratique.

1.3.2 Forme générale de la solution, stabilité, causalité

Commençons par étudier la solution générale de l'équation (1.25) sans second membre. Pour la déterminer, on introduit le polynôme caractéristique et sa factorisation,

$$P(X) = \sum_{n=0}^q a_n X^n = a_q \prod_{i=1}^{n_r} (X - r_i)^{m_i}, \quad (1.26)$$

avec $\sum_{i=1}^{n_r} m_i = q$, où $(r_i)_{1 \leq i \leq n_r}$ sont les racines de P et m_i est la multiplicité de la racine r_i . La solution générale sans second membre s'écrit alors

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{i,j} t^j \right) e^{r_i t}. \quad (1.27)$$

Pour montrer que cette forme convient, il suffit de remarquer que pour tout $n \geq 1$, $\left(\frac{d}{dt} - r\right)^n (t^{n-1} e^{rt}) = 0$ (cela se démontre facilement par récurrence).

Chaque terme de cette somme est analogue à la solution générale du système RC, les racines r_i correspondant à $1/\tau$; le nombre de degrés de liberté de la réponse impulsionnelle est maintenant q . En appliquant le même raisonnement que pour le circuit RC à chaque terme dans le calcul de la réponse impulsionnelle, on aboutit à la propriété suivante.

Le SLI défini par l'équation différentielle (1.25) est stable et causal si et seulement si toutes les racines du polynôme caractéristique $P(X) = \sum_{n=0}^q a_n X^n$ ont une partie réelle strictement négative.

Les polynômes dont toutes les racines sont à partie réelle strictement négative sont appelés *polynômes de Hurwitz*. Le *critère de Routh* permet de dire si un polynôme est de Hurwitz à partir de ses coefficients. En pratique, il n'est cependant pas immédiat à mettre en œuvre et il est tout aussi facile de déterminer numériquement les racines du polynôme.

Enfin, on note qu'il n'est pas facile de déterminer la réponse impulsionnelle, ou la solution en régime libre (sans terme source, avec conditions initiales données) à partir de la solution générale (1.27). Pour cela, la transformée de Laplace fournit une méthode systématique.

Chapitre 2

Transformations des systèmes linéaires

2.1 Fonctions propres d'un SLI

Les fonctions exponentielles sont fonctions propres des systèmes linéaires invariants. La valeur propre associée à $e^{\omega t}$, $\omega \in \mathbb{C}$, est $H(\omega) = \mathcal{H}[e^{\omega t}]|_{t=0}$.

Démonstration : Prenons un signal d'entrée de la forme $e_{\omega}(t) = e^{\omega t}$, avec $\omega \in \mathbb{C}$; la sortie associée est $s_{\omega} = \mathcal{H}[e_{\omega}]$. Calculons la sortie translatée par t_0 :

$$s_{\omega}(t + t_0) = \mathcal{H}[e_{\omega}(t + t_0)], \quad (2.1)$$

$$= \mathcal{H}[e^{\omega t_0} e_{\omega}(t)], \quad (2.2)$$

$$= e^{\omega t_0} \mathcal{H}[e_{\omega}(t)], \quad (2.3)$$

$$= e^{\omega t_0} s_{\omega}(t). \quad (2.4)$$

En posant $t = 0$ et en changeant de nom de variable, $t_0 \rightarrow t$, on obtient

$$s_{\omega}(t) = s_{\omega}(0)e^{\omega t} = s_{\omega}(0)e_{\omega}(t) : \quad (2.5)$$

e_{ω} est vecteur propre de \mathcal{H} pour la valeur propre $s_{\omega}(0) = \mathcal{H}[e_{\omega}]|_{t=0}$. \square

D'après le théorème de superposition, on connaît la réponse à toute combinaison linéaire (discrète ou continue) de fonctions exponentielles à l'aide de la fonction $H(\omega)$:

$$e(t) = \int f(\omega)e^{\omega t} d\omega \xrightarrow{\mathcal{H}} s(t) = \int H(\omega)f(\omega)e^{\omega t} d\omega. \quad (2.6)$$

Décomposer une fonction en une somme d'exponentielles est exactement ce que permettent de faire les transformations de Fourier et de Laplace. C'est la raison pour laquelle ces transformations jouent un rôle fondamental dans la théorie des systèmes linéaires invariants, rôle développé dans les deux paragraphes qui suivent. On va montrer en particulier que la donnée de la fonction H est équivalente à la donnée de la réponse impulsionnelle.

Remarque : ce résultat justifie que pour des systèmes décrits par des équations différentielles linéaires à coefficient constants, une des premières choses que l'on apprend est que la réponse à une fonction harmonique est toujours une fonction harmonique, avec un changement de phase et d'amplitude.

2.2 Transformée de Fourier

2.2.1 Définition

La définition de la transformée de Fourier (et donc de son inverse) varie en fonction des ouvrages, des communautés d'utilisateurs, etc. Il faut garder à l'esprit que les différences sont principalement des différences de signe sur « i » ou de facteurs de la forme $\sqrt{2\pi}$, qui se répercutent sur divers théorèmes comme ceux relatifs au produit de convolution. Dans ce chapitre, la définition choisie est celle du cours de méthodes mathématiques.

Transformée de Fourier : La transformée de Fourier (TF) d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est donnée par

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (2.7)$$

Il est important de noter que la TF ne s'applique qu'à des fonctions intégrables (il est toutefois vu dans le cours de méthodes mathématiques qu'on peut la définir pour des fonction \mathcal{L}^2).

La transformée inverse est donnée par la formule suivante.

La transformée de Fourier inverse d'une fonction $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est donnée par

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.8)$$

Remarque : La transformée de Fourier inverse a une forme proche de la transformée de Fourier ; cela se traduit par la propriété suivante, qui se démontre aisément :

$$\mathcal{F}^{-1}[f] = \overline{\mathcal{F}[\tilde{f}]}. \quad (2.9)$$

Cela implique qu'à toute propriété de la TF est associée une propriété « duale » obtenue par application de cette propriété sur la transformée inverse.

2.2.2 Propriétés

Transformée de Fourier d'un produit de convolution : Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$\widetilde{f * g} = \sqrt{2\pi} \tilde{f} \times \tilde{g}. \quad (2.10)$$

Démonstration :

$$\widetilde{f * g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \int f(t-t')g(t')dt' dt \quad (2.11)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int e^{-i\omega t''} f(t'')e^{-i\omega t'} g(t') dt' dt'' \quad (2.12)$$

$$= \sqrt{2\pi} \tilde{f}(\omega) \times \tilde{g}(\omega). \quad (2.13)$$

On a utilisé le changement de variables $t'' = t - t'$. □

Transformée de Fourier d'un produit : Soient deux fonctions f et g , alors

$$\widetilde{f \times g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f} * \tilde{g}. \quad (2.14)$$

Démonstration : On peut utiliser la dualité (Eq. (2.9)) avec la transformée de Fourier d'un produit de convolution (Eq. (2.10)). Commençons par prendre la TF inverse de l'équation (2.10) :

$$f * g = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f} \times \tilde{g}]. \quad (2.15)$$

Changeons maintenant de variables, en renommant $f \rightarrow \tilde{\tilde{f}}$, et de même pour g :

$$\tilde{\tilde{f}} * \tilde{\tilde{g}} = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\tilde{f}} \times \tilde{\tilde{g}}]. \quad (2.16)$$

Or, d'après la propriété de dualité :

$$\tilde{\tilde{f}} = \mathcal{F}[\tilde{\tilde{f}}] = \overline{\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\tilde{f}}]} = \tilde{f}. \quad (2.17)$$

On arrive donc à

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f} * \tilde{g} = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f} \times \tilde{g}] \quad (2.18)$$

$$= \mathcal{F}^{-1}[\overline{f \times g}] \quad (2.19)$$

$$= \overline{\mathcal{F}[f \times g]}. \quad (2.20)$$

En prenant le conjugué, on arrive donc à

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f} * \tilde{g} = \overline{f \times g}. \quad (2.21)$$

□

La transformée de Fourier de la dérivée n -ième de la fonction f , $f^{(n)}$, est donnée par

$$\widetilde{f^{(n)}}(\omega) = (i\omega)^n \tilde{f}(\omega). \quad (2.22)$$

Démonstration : Il s'agit d'intégrer par parties n fois, en supposant que les termes de bord sont nuls :

$$\widetilde{f^{(n)}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f^{(n)}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.23)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) \frac{d^n}{dt^n} e^{-i\omega t} dt \quad (2.24)$$

$$= \frac{(i\omega)^n}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.25)$$

$$= (i\omega)^n \tilde{f}(\omega). \quad (2.26)$$

□

2.2.3 Application aux SLI

D'après la section 2.1,

$$e(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \xrightarrow{\mathcal{H}} s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) \tilde{e}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.27)$$

Dans la dernière intégrale, on reconnaît la transformée de s , ainsi

$$\tilde{s} = H_F \times \tilde{e}, \quad (2.28)$$

où on a introduit $H_F(\omega) = H(i\omega)$.

D'autre part, la relation (1.11) liant la sortie à l'entrée via la réponse impulsionnelle h , $s = h * e$, implique d'après le théorème de convolution que $\tilde{s} = \sqrt{2\pi} \tilde{h} \times \tilde{e}$. Par identification avec l'équation ci-dessus, on obtient le résultat suivant.

La fonction H_F qui donne la valeur propre associée à la fonction propre $t \mapsto e^{i\omega t}$ est proportionnelle à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle :

$$H_F = \sqrt{2\pi} \tilde{h}. \quad (2.29)$$

2.2.3.1 Fonction de transfert d'un circuit RC

La fonction de transfert d'un circuit RC, qui est régit par l'équation (1.3), est donnée par

$$H_F(\omega) = \frac{1}{1 + i\tau\omega}. \quad (2.30)$$

2.2.3.2 Module visco-élastique du fluide complexe

On appelle module visco-élastique d'un fluide complexe la fonction de transfert $H_F(\omega)$, et on la note souvent $G(\omega)$:

$$\tilde{\sigma}(\omega) = G(\omega)\tilde{\gamma}(\omega). \quad (2.31)$$

Elle est proportionnelle à la fonction de mémoire introduite en Sec. 1.2.4.2. On la décompose en parties réelle et imaginaire,

$$G(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega), \quad (2.32)$$

où $G'(\omega)$ est le module de stockage et $G''(\omega)$ est le module de dissipation (voir Sec. 3.1.1).

Pour un fluide Newtonien où $\sigma(t) = \eta\dot{\gamma}(t)$, le module visco-élastique est $G(\omega) = i\eta\omega$ (purement dissipatif) ; pour un solide il vaut $G(\omega) = E$ (purement élastique).

2.2.4 Représentations de la fonction de transfert d'un système temporel

Il existe plusieurs façons de représenter la fonction de transfert $H_F(\omega)$ d'un système temporel :

- Diagramme de Bode : le module $|H_F(\omega)|$ est représenté en échelle logarithmique, et sa phase $\phi(\omega) = \arg(H_F(\omega))$ en échelle semi-logarithmique. Ces quantités correspondent respectivement à l'amplification et au déphasage du signal d'entrée. Cela permet de représenter facilement la fonction de transfert de plusieurs systèmes en série.
- Les parties réelle et imaginaire de $H_F(\omega)$ sont représentées en échelle logarithmique. Cette représentation est souvent utilisée pour le module visco-élastique d'un fluide.

2.3 Transformée de Laplace

2.3.1 Définition

Nous introduisons ici la transformée de Laplace, qui est très utile pour l'étude des systèmes temporels et en particulier pour la résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants avec conditions initiales.

Transformée de Laplace : La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ définie sur $]0, \infty[$ est donnée par

$$\mathcal{L}[f](p) = \hat{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (2.33)$$

Remarque : l'hypothèse sur la fonction f est importante, elle est liée au fait que la transformée de Laplace ne concerne que la fonction sur \mathbb{R}_+ . C'est ce qui différencie la transformée de Laplace de la transformée de Fourier.

La transformée inverse est donnée par la formule de Bromwich-Mellin :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \hat{f}(p) dp. \quad (2.34)$$

Le contour d'intégration est une droite, γ est choisi de telle sorte que l'intégrale converge. Cette formule est peu utilisée en pratique, on préfère se référer à une table des transformées classiques.

2.3.2 Propriétés

Calculons la transformée de Laplace de la dérivée de la fonction f avec une intégration par parties

$$\widehat{f'}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = -f(0^-) + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = p\hat{f}(p) - f(0). \quad (2.35)$$

Par récurrence, cette formule se généralise en

Transformée de Laplace d'une dérivée :

$$\widehat{f^{(n)}}(p) = p^n \hat{f}(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0). \quad (2.36)$$

On a aussi les propriétés suivantes.

Théorème de la valeur initiale : si f a une limite finie en 0, alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \hat{f}(p). \quad (2.37)$$

Démonstration : Écrivons explicitement

$$p \hat{f}(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{p}\right) du, \quad (2.38)$$

où nous avons fait le changement de variables $u = pt$. La limite simple de la fonction intégrée quand $p \rightarrow \infty$ est $e^{-u} f(0)$, dont l'intégrale vaut $f(0)$. Il faut donc utiliser le théorème de convergence dominée; une condition suffisante est que $f(t)$ soit bornée. \square

Théorème de la valeur finale : si f a une limite finie en l'infini, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \hat{f}(p). \quad (2.39)$$

Démonstration : De même que pour le théorème de la valeur initiale, la limite simple est cette fois $e^{-u} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$. \square

Transformée de Laplace d'un produit de convolution : Soient f et g deux fonctions nulles sur \mathbb{R}_- , alors

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}. \quad (2.40)$$

Démonstration :

$$\widehat{f * g}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \left[\int_0^{\infty} f(t-t')g(t')dt' \right] dt \quad (2.41)$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-p(t-t')} f(t-t') e^{-pt'} g(t') dt dt' \quad (2.42)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-pt'} g(t') \left[\int_{-t'}^{\infty} e^{-pu} f(u) du \right] dt' \quad (2.43)$$

$$= \hat{f}(p) \times \hat{g}(p). \quad (2.44)$$

où on a utilisé que $g(t) = 0 \forall t < 0$ pour écrire le produit de convolution en (2.41) et que $f(t) = 0 \forall t < 0$ en (2.44). \square

2.3.3 Transformées classiques

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](p)$
$\delta(t)$	1
$\frac{t^n}{n!} e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^{n+1}}$

2.3.4 Application aux SLI

La similarité entre l'effet de la transformée de Fourier et de celle de Laplace sur un produit de convolution conduit à imaginer le même lien qu'en section 2.2 entre la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle et les valeurs propres $H(p)$ associées aux vecteurs propres $t \mapsto e^{pt}$ de \mathcal{H} . La relation $s = h * e$ (1.11) se traduit pour un système causal et une entrée nulle aux temps négatifs par $\hat{s} = \hat{h} \times \hat{e}$. D'autre part en écrivant l'entrée avec la transformée de Bromwich-Mellin, comme en (2.27),

$$e(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \hat{e}(p) dp \xrightarrow{\mathcal{H}} s(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} H(p) \hat{e}(p) dp. \quad (2.45)$$

L'intégrale de droite signifie que $\hat{s}(p) = H(p)\hat{e}(p)$, ainsi,

Pour un système causal, la fonction H qui donne la valeur propre associée à la fonction propre $t \mapsto e^{pt}$ est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle, *i.e.*,

$$H = \hat{h}. \quad (2.46)$$

2.4 Système temporel (linéaire) décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

Dans cette section, on caractérise le système temporel décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants introduit en Sec. 1.3 à l'aide de sa fonction de transfert. On souligne la différence entre le rôle des transformées de Fourier et de Laplace pour calculer la réponse impulsionnelle, et on montre que la stabilité et la causalité d'un système sont déterminés uniquement par la position des pôles de la fonction de transfert.

On montre finalement comment en pratique la transformée de Laplace est l'outil de choix pour résoudre les équations différentielles linéaire à coefficients constants en prenant en compte les conditions initiales.

2.4.1 Approche par transformée de Fourier

2.4.1.1 Transformée de l'équation et réponse impulsionnelle

En prenant la transformée de Fourier de l'équation (1.25), on obtient l'expression suivante :

$$\tilde{s}(\omega) = \frac{\sum_{n=0}^r b_n (i\omega)^n}{\sum_{n=0}^q a_n (i\omega)^n} \tilde{e}(\omega) \quad (2.47)$$

La fonction de transfert est donc donnée par

$$H_F(\omega) = \frac{\sum_{n=0}^r b_n (i\omega)^n}{\sum_{n=0}^q a_n (i\omega)^n}, \quad (2.48)$$

et la réponse impulsionnelle vaut donc, d'après (2.29),

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_F(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (2.49)$$

On constate que la solution obtenue par cette méthode est unique, or on sait que l'ensemble des solutions de l'équation est un espace de dimension q . Ici, l'unicité est imposée par le fait qu'on a supposé l'existence d'une transformée de Fourier pour $e(t)$ et $s(t)$, ce qui sélectionne la réponse intégrable correspondant à un système stable.

2.4.1.2 Décomposition de la fonction de transfert en éléments simples

Comme toute fraction rationnelle, la fonction de transfert (2.48) se décompose en éléments simples :

$$H_F(\omega) = \frac{N_F(\omega)}{D_F(\omega)} = Q(\omega) + \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(\omega - \omega_i)^j}, \quad (2.50)$$

où Q est la partie entière, $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n_r}$ sont les racines du polynôme D_F , m_i est la multiplicité de la racine ω_i et $\alpha_{i,j}$ sont des nombres. L'hypothèse sur l'équation différentielle (1.25), $r = \deg(N) < q = \deg(D)$, implique que la partie entière est nulle.

Remarque : Les polynômes $N_F(\omega)$ et $D_F(\omega)$ correspondent respectivement au numérateur et au dénominateur de la fonction de transfert (2.48) après simplification des racines communes ($N_F(\omega)$ et $D_F(\omega)$ sont premiers entre eux).

2.4.1.3 Rôle sur la stabilité et la causalité du système

D'après la relation (2.29), la fonction de transfert H_F correspond à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle h : $H_F = \hat{h}$. Ainsi, la réponse impulsionnelle est donnée par

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_F(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(\omega - \omega_i)^j} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (2.51)$$

Pour calculer la transformée de Fourier inverse du terme $(\omega - \omega_i)^{-j}$, on utilise la méthode des résidus :

- Pour $t > 0$, il faut refermer le contour par un demi-cercle dans le plan supérieur pour pouvoir appliquer le lemme de Jordan, ainsi $\text{Re}(i\omega t) = -\text{Im}(\omega)t < 0$. Si ω_i est dans le demi-plan inférieur, l'intégrale est nulle. Si ω_i est dans le demi-plan supérieur, le résidu est

$$\text{Rés}_{\omega_i} \left(\omega \mapsto \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - \omega_i)^j} \right) = \frac{(it)^{j-1}}{(j-1)!} e^{i\omega_i t}. \quad (2.52)$$

L'intégrale vaut donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - \omega_i)^j} \frac{d\omega}{2\pi} = \begin{cases} \frac{i^j t^{j-1}}{(j-1)!} e^{i\omega_i t} & \text{si } \text{Im}(\omega_i) > 0, \\ 0 & \text{si } \text{Im}(\omega_i) < 0. \end{cases} \quad (2.53)$$

- Pour $t < 0$, on retrouve le même résultat qu'en Éq. (2.53) en inversant les conditions sur $\text{Im}(\omega_i)$.

On constate que tous les termes qui interviennent dans la fonction de transfert, de la forme (2.53) décroissent exponentiellement et ont donc une intégrale finie.

Le système est causal si $h(t) = 0$ pour $t < 0$. Pour cela, il ne faut pas de pôle dans le demi-plan inférieur.

La fonction de transfert de Fourier d'un système stable et causal n'a que des pôles à partie imaginaire positive.

Dans les cas où il existe un ou plusieurs pôles de H_F sur l'axe réel, la méthode ci-dessus ne s'applique plus. On admettra qu'il y a plusieurs solutions $h(t)$ possibles, mais qu'une seule est causale (cf. exemple en travaux dirigés de Mathématiques en 2^{ème} année).

2.4.2 Approche par transformée de Laplace

2.4.2.1 Transformée de l'équation et réponse impulsionnelle

En prenant la transformée de Laplace de l'équation (1.25), on obtient l'expression suivante :

$$\hat{s}(p) = \frac{\sum_{n=0}^r b_n p^n}{\sum_{n=0}^q a_n p^n} \hat{e}(p) - \frac{\sum_{n=1}^r b_n \left[\sum_{j=0}^{n-1} p^{n-1-j} e^{(j)}(0^-) \right]}{\sum_{n=0}^q a_n p^n} + \frac{\sum_{n=1}^q a_n \left[\sum_{j=0}^{n-1} p^{n-1-j} s^{(j)}(0^-) \right]}{\sum_{n=0}^q a_n p^n}. \quad (2.54)$$

Cette expression comporte trois termes, dont le premier ne dépend que des caractéristiques du système, et dont les deux suivants dépendent des conditions initiales sur le signal d'entrée et sur la réponse du système.

On peut considérer que la distribution de Dirac est nulle en 0^- . Le premier terme donne donc la réponse à une excitation impulsionnelle pour un système initialement au repos, c'est à dire par définition la réponse impulsionnelle. Le troisième terme donne le régime libre, c'est à dire l'évolution du système quand il évolue sans second membre, mais avec des conditions initiales données.

La fonction de transfert est donc donnée par

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\sum_{n=0}^r b_n p^n}{\sum_{n=0}^q a_n p^n}, \quad (2.55)$$

et d'après la relation (2.46), si la réponse impulsionnelle $h(t)$ est nulle aux temps négatifs, elle est liée à la fonction de transfert par

$$H(p) = \hat{h}(p). \quad (2.56)$$

Comme pour la transformée de Fourier, l'inversion de la transformée de Laplace donne un résultat unique pour la réponse impulsionnelle. Cette fois, c'est une solution causale qui est sélectionnée par la construction de la transformée de Laplace.

2.4.2.2 Rôle sur la stabilité et la causalité du système

De la même manière qu'avec la transformée de Fourier, on peut décomposer la fonction de transfert en éléments simples :

$$H(p) = \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\bar{\alpha}_{i,j}}{(p - p_i)^j} \quad (2.57)$$

où $(p_i)_{1 \leq i \leq n_r}$ sont les racines du polynôme D , m_i est la multiplicité de la racine p_i et $\bar{\alpha}_{i,j}$ sont des nombres. Comme $H_F(\omega) = H(i\omega)$, cette décomposition correspond à la décomposition (2.50) avec $p_i = i\omega_i$, $\bar{\alpha}_{i,j} = i^j \alpha_{i,j}$.

En inversant la transformée de Laplace, on obtient pour la réponse impulsionnelle

$$h(t) = \theta(t) \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\bar{\alpha}_{i,j} t^{j-1}}{(j-1)!} e^{p_i t}. \quad (2.58)$$

De cette expression, on déduit que le système est stable ($h(t)$ est intégrable) si et seulement si les racines p_i sont à partie réelle strictement négative : on retrouve le résultat de la section 1.3.2.

Un système est stable et causal si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.

Remarques :

- Si des racines p_i ont une partie réelle nulle, le système n'est pas stable au sens « BIBO », il est dit *marginale*ment stable.
- Si les pôles (p_i) de $H(p)$ sont à partie réelle négative, les pôles $\omega_i = -ip_i$ sont à partie imaginaire positive, ce qui correspond à la condition de causalité dans l'approche par transformée de Fourier. Dans ce cas, les réponses impulsionnelles calculées par les deux approches coïncident et le système est stable et causal.

Deuxième partie

Signaux

Chapitre 3

Représentation et manipulation de signaux par transformée de Fourier

3.1 Définition et propriétés élémentaires

Nous reprenons les définitions et propriétés élémentaires vues en Sec. 2.2.

La transformée de Fourier d'une fonction réelle $f(t)$ vérifie

$$\tilde{f}(-\omega) = \overline{\tilde{f}(\omega)}. \quad (3.1)$$

La transformée de Fourier d'une fonction paire est paire.

De ces deux propriétés, on peut déduire que la transformée de Fourier d'une fonction réelle paire est une fonction réelle paire.

Effet d'une translation :

$$g(t) = f(t + t_0) \implies \tilde{g}(\omega) = e^{i\omega t_0} \tilde{f}(\omega). \quad (3.2)$$

Démonstration :

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} g(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} f(t + t_0) dt = \frac{e^{i\omega t_0}}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t'} f(t') dt' = e^{i\omega t_0} \tilde{f}(\omega), \quad (3.3)$$

avec le changement de variables $t' = t + t_0$.

La propriété « duale » de celle-ci (cf. Remarque (2.9)) est la suivante :

Multiplication par une exponentielle :

$$g(t) = e^{i\omega_0 t} f(t) \implies \tilde{g}(\omega) = \tilde{f}(\omega - \omega_0). \quad (3.4)$$

Produit scalaire : On définit le produit scalaire hermitien de deux fonctions f et g de carré sommable par

$$\langle f, g \rangle = \int f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (3.5)$$

Théorème de Parseval-Plancherel : La transformée de Fourier est une isométrie pour le produit scalaire (3.5), c'est à dire

$$\langle f, g \rangle = \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle, \quad (3.6)$$

ou encore

$$\int f(t)\overline{g(t)}dt = \int \tilde{f}(\omega)\overline{\tilde{g}(\omega)}d\omega. \quad (3.7)$$

Démonstration :

$$\int f(t)\overline{g(t)}dt = \int \left[\int \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \right] \times \overline{\left[\int \tilde{g}(\omega')e^{i\omega' t} \frac{d\omega'}{\sqrt{2\pi}} \right]} dt \quad (3.8)$$

$$= \int \tilde{f}(\omega)\overline{\tilde{g}(\omega')}e^{i(\omega-\omega')t} \frac{dt d\omega d\omega'}{2\pi} \quad (3.9)$$

$$= \int \tilde{f}(\omega)\overline{\tilde{g}(\omega')}\delta(\omega-\omega')d\omega d\omega' \quad (3.10)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\overline{\tilde{g}(\omega)}d\omega. \quad (3.11)$$

Nous avons utilisé la transformée de Fourier d'une constante, Éq. (3.19). □

3.1.1 Énergie dissipée dans un fluide complexe

La puissance volumique absorbée par un fluide soumis à un cisaillement $\gamma(t)$ dont la contrainte est $\sigma(t)$ est $p(t) = \sigma(t)\dot{\gamma}(t)$. L'énergie totale absorbée par le fluide, que l'on peut réécrire en utilisant le théorème de Parseval-Plancherel (Eq. (3.7)) puis la définition du module visco-élastique (2.31) est

$$E = \int \sigma(t)\dot{\gamma}(t)dt \quad (3.12)$$

$$= \int \tilde{\sigma}(\omega)i\omega\overline{\tilde{\gamma}(\omega)}d\omega, \quad (3.13)$$

$$= -i \int \omega G(\omega) |\tilde{\gamma}(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.14)$$

On décompose module visco-élastique en ses parties réelle et imaginaire : $G(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega)$. D'après la propriété (3.1), $G'(\omega)$ est paire et $G''(\omega)$ est impaire, donc seule $G''(\omega)$ contribue à l'intégrale (3.14) :

$$E = \int \omega G''(\omega) |\tilde{\gamma}(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.15)$$

Pour cette raison, on appelle $G''(\omega)$ le module de *dissipation*, il est associé au caractère visqueux du fluide ; pour un fluide qui dissipe de l'énergie il doit vérifier $G''(\omega) \geq 0$ pour $\omega > 0$. $G'(\omega)$ est le module de *stockage*, il est associé au caractère élastique du fluide. Pour un fluide newtonien, $G'(\omega) = 0$ et $G''(\omega) = \eta\omega$.

3.2 Signaux et distributions de base

Les signaux et distributions présentés ci-après sont parmi les plus rencontrés dans de nombreux domaines utilisant l'analyse Fourier. Il importe d'en connaître les transformées de Fourier, au minimum d'un point de vue qualitatif. Quand les définitions intégrales des transformées de Fourier posent un problème (fonction non intégrables, ...), les transformées de Fourier correspondantes sont à prendre au sens des distributions.

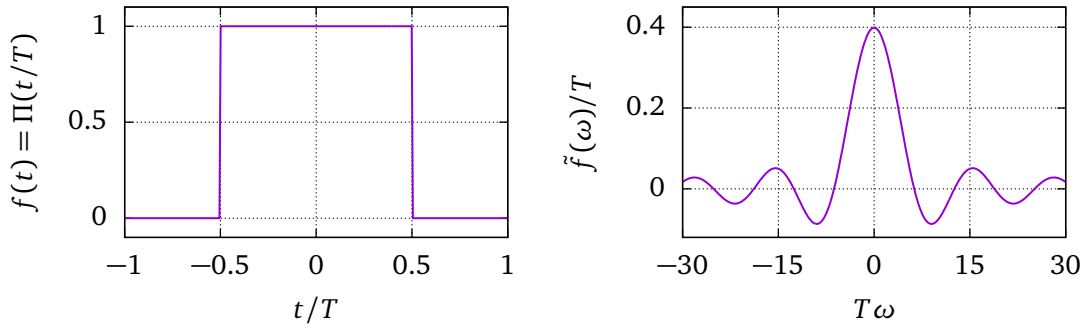


FIGURE 3.1 – Fonction porte et sa transformée de Fourier (Éq. (3.21)).

Gaussienne :

$$f(t) = e^{-t^2/(2T^2)} \longrightarrow \tilde{f}(\omega) = T e^{-T^2 \omega^2/2}. \quad (3.16)$$

Démonstration :

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2T^2} - i\omega t\right) dt = \frac{e^{-T^2 \omega^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{[t + i\omega T^2]^2}{2T^2}\right) dt. \quad (3.17)$$

On montre ensuite facilement avec le théorème des résidus que l'intégrale est simplement l'intégrale de la gaussienne, qui vaut $\sqrt{2\pi}T$. □

En passant à la limite $T \rightarrow 0$ (en divisant les deux côtés par $\sqrt{2\pi}T$) ou $T \rightarrow \infty$ dans l'équation (3.16), on aboutit aux transformées suivantes.

Dirac et constante :

$$f(t) = \delta(t) \longrightarrow \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (3.18)$$

$$f(t) = 1 \longrightarrow \tilde{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\delta(\omega). \quad (3.19)$$

En utilisant ces transformées de Fourier, ainsi que la propriété de multiplication (3.4), on peut obtenir par exemple la transformée de Fourier d'une sinusoïde :

$$f(t) = \cos(\omega_0 t + \phi) \longrightarrow \tilde{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [e^{i\phi} \delta(\omega - \omega_0) + e^{-i\phi} \delta(\omega + \omega_0)] \quad (3.20)$$

Fonction porte :

$$f(t) = \Pi_T(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \longrightarrow \tilde{f}(\omega) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}\left(\frac{T\omega}{2}\right). \quad (3.21)$$

Démonstration :

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-i\omega T/2} - e^{i\omega T/2}}{-i\sqrt{2\pi}\omega} = \frac{2 \sin(\omega T/2)}{\sqrt{2\pi}\omega} = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}\left(\frac{T\omega}{2}\right). \quad (3.22)$$

□

La fonction porte et sa transformée de Fourier sont tracées en Fig. 3.1.

3.3 Relation d'incertitude

La « relation d'incertitude », utilisée notamment en mécanique quantique, est une relation très générale reliant la « largeur » d'une fonction et celle de sa transformée de Fourier.

3.3.1 Énergie, position moyenne et largeur d'un signal

On définit dans cette section l'énergie, la position moyenne et la largeur d'un signal, quand elles existent. Ces deux dernières correspondent à la moyenne et à la variance d'une variable aléatoire de densité (normalisée) $|f(t)|^2$.

Énergie d'un signal : L'énergie d'un signal $f(t)$ de carré sommable est donnée par

$$E_f = \int |f(t)|^2 dt. \quad (3.23)$$

D'après le théorème de Parseval-Plancherel, Éq. (3.7), l'énergie d'un signal peut aussi être obtenue par sa transformée de Fourier.

Position moyenne d'un signal : La position moyenne d'un signal $f(t)$ d'énergie E_f est donnée par

$$\bar{t}_f = \frac{1}{E_f} \int t |f(t)|^2 dt. \quad (3.24)$$

Largeur d'un signal : La largeur d'un signal $f(t)$ d'énergie E_f et de position moyenne \bar{t}_f est définie par

$$\Delta t_f = \left[\frac{1}{E_f} \int (t - \bar{t}_f)^2 |f(t)|^2 dt \right]^{1/2}. \quad (3.25)$$

Ces définitions s'appliquent aussi dans l'espace de Fourier.

Remarque : On montre facilement qu'un signal g obtenu par translation du signal f a la même largeur que f . Ainsi, on ne démontrera la relation d'incertitude que pour des signaux de position moyenne nulle.

3.3.2 Relation d'incertitude

La relation d'incertitude (souvent appelée relation d'incertitude de Gabor-Heisenberg) traduit la dépendance entre la largeur d'un signal et celle de sa transformée de Fourier.

Relation d'incertitude : Soit f un signal admettant des largeurs temporelle Δt et spectrale $\Delta \omega$, alors ces largeurs vérifient l'inégalité

$$\Delta t \times \Delta \omega \geq \frac{1}{2}. \quad (3.26)$$

Démonstration : Pour le produit scalaire (3.5), on a l'inégalité de Schwartz :

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \times \|g\|, \quad (3.27)$$

où la norme est celle associée au produit scalaire, $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$.

On se restreint, sans perte de généralité, à un signal de position moyenne nulle (dans l'espace réel et dans l'espace de Fourier). Considérons la quantité

$$A = \left| \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{d}{dt} [|f(t)|^2] dt \right|, \quad (3.28)$$

et évaluons-la de deux façons différentes. Par une intégration par parties,

$$A = \left| [t |f(t)|^2]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right| = |0 - E_f| = E_f, \quad (3.29)$$

le terme de bord est nul car la position moyenne est bien définie.

D'autre part, en développant la dérivée puis en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$A = \left| \int_{-\infty}^{\infty} t f'(t) \overline{f(t)} dt + \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) \overline{f'(t)} dt \right| \quad (3.30)$$

$$\leq 2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt \times \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt \right]^{1/2}. \quad (3.31)$$

Les deux termes qui apparaissent s'expriment simplement :

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt = E_f \Delta t_f^2, \quad (3.32)$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |i\omega \tilde{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega = E_f \Delta \omega_f^2. \quad (3.33)$$

On obtient donc pour A :

$$A \leq 2E_f \Delta t_f \Delta \omega_f. \quad (3.34)$$

En comparant avec l'équation (3.29), on obtient l'inégalité (3.26). \square

3.3.3 Application à l'inégalité de Heisenberg

La relation d'incertitude est le fondement de l'inégalité de Heisenberg en mécanique quantique, qui stipule qu'on ne peut pas mesurer la position x et la quantité de mouvement p d'une particule quantique avec une précision arbitraire.

Une particule quantique est décrite par sa fonction d'onde $\psi(x)$. D'une part, $|\psi(x)|^2$ donne la densité de probabilité de présence. La position moyenne et l'écart-type de la position sont donc définis par les relations (3.24) et (3.25), respectivement (il faut utiliser que $\|\psi\| = 1$). D'autre part, la quantité de mouvement p est associée à l'opérateur $-i\hbar\nabla$; sa valeur moyenne et son écart-type sont donc donnés par

$$\bar{p} = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x)} \psi'(x) dx, \quad (3.35)$$

$$\Delta p = \left[\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx - \bar{p}^2 \right]^{1/2}. \quad (3.36)$$

En utilisant le théorème de Parseval-Plancherel (Éq. (3.7)), on peut réécrire ces expressions avec la transformée de Fourier de la fonction d'onde :

$$\bar{p} = \hbar \int k |\tilde{\psi}(k)|^2 dk, \quad (3.37)$$

$$\Delta p = \left[\hbar^2 \int k^2 |\tilde{\psi}(k)|^2 dk - \bar{p}^2 \right]^{1/2}. \quad (3.38)$$

On reconnaît dans ces expressions la position moyenne et la largeur de la transformée de Fourier de la fonction d'onde, $\tilde{\psi}(k)$, au facteur \hbar près. En utilisant la relation d'incertitude (3.26), on obtient donc

$$\Delta x \times \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (3.39)$$

ce qui est l'inégalité de Heisenberg.

Ce résultat montre que l'inégalité de Heisenberg est encodée dans la description en terme de fonction d'onde, ainsi que dans les opérateurs position et quantité de mouvement. Il ne s'agit pas d'un axiome, ou « principe », supplémentaire.

3.4 Relation de Kramers-Kronig

Relation de Kramers-Kronig : Soit $h(t)$ une fonction nulle pour $t \leq 0$, alors sa transformée de Fourier vérifie la relation de Kramers-Kronig :

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{i}{\pi} \int \frac{\tilde{h}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (3.40)$$

Remarques :

- L'intégrande diverge en ω , mais sa valeur principale est bien définie ; c'est elle que l'on utilise ici.
- La relation de Kramers-Kronig donne une relation entre les parties réelle et imaginaire de $\tilde{h}(\omega)$. Par exemple, les modules de stockage et de dissipation d'une fluide ne sont pas indépendants. Comme ils sont mesurés séparément, un premier test de la mesure est de vérifier la relation de Kramers-Kronig.

Démonstration : Par hypothèse, $h(t) = S(t)h(t)$, avec $S(t) = 2\theta(t) - 1$ la fonction signe. En passant à la transformée de Fourier et en utilisant la propriété (2.14), on obtient

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{S} * \tilde{h}(\omega). \quad (3.41)$$

La fonction signe n'est pas intégrable. Nous allons tricher et obtenir sa transformée de Fourier en la considérant comme limite de $S_\epsilon(t) = S(t) \exp(-\epsilon|t|)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. On obtient $\tilde{S}_\epsilon(\omega) = -\sqrt{2/\pi} i \omega / (\epsilon^2 + \omega^2)$, puis $\tilde{S}(\omega) = -\sqrt{2/\pi} i / \omega$. On remarque que ce résultat est cohérent avec $\tilde{\delta}(\omega) = 1/\sqrt{2\pi}$ car $S'(t) = 2\delta(t)$. En l'utilisant dans le produit de convolution, on obtient l'égalité recherchée. \square

3.5 Applications de la multiplication de signaux

3.5.1 Transmission radio par modulation d'amplitude

Considérons un signal audio $f(t)$, correspondant à une prise de son avec une bande passante de l'ordre de 5 kHz : la largeur spectrale totale (en comptant les fréquences négatives) du signal est donc de l'ordre de 10 kHz (5 kHz de part et d'autre de la fréquence nulle).

Pour propager ce type de signal à l'aide d'une onde électromagnétique, il faut propager l'information avec une onde dont la gamme de fréquence est de l'ordre de 1 MHz à une centaine de MHz. Une façon simple est d'utiliser une onde sinusoïdale de fréquence élevée, dite porteuse, dont l'amplitude est modulée par le signal audio à transporter. Mathématiquement, la modulation d'amplitude est simplement une *multiplication* de l'amplitude de l'onde porteuse $\cos(\omega_p t)$ par le signal que l'on veut transporter $f(t)$:

$$f_m(t) = f(t) \cos(\omega_p t). \quad (3.42)$$

Dans la pratique, on ajoute en réalité un décalage constant au signal $f(t)$, mais ce point ne modifie en rien le raisonnement qui suit.

La multiplication dans l'espace temporel se traduit par une convolution dans l'espace des fréquences (Éq. (2.14)), et la transformée de Fourier de l'onde modulée est donnée par

$$\tilde{f}_m(\omega) = \frac{1}{2} [\tilde{f}(\omega - \omega_p) + \tilde{f}(\omega + \omega_p)]. \quad (3.43)$$

Cet effet sur le spectre est représenté en Fig. 3.2.

Le spectre du signal modulé est donc dédoublé de part et d'autre de la fréquence de modulation. Si l'on veut transporter deux ondes en même temps sans qu'elles ne se recouvrent en fréquence, il faut que les fréquences des porteuses utilisées soient séparées d'au moins 10 kHz. On pourra constater sur un poste de radio que le pas en fréquence proposé en AM est bien de l'ordre de 10 kHz.

3.5.2 Résonance magnétique nucléaire

Un système « résonant » est caractérisé par une fonction de transfert présentant des pics aux fréquences dites de résonance. Prenons l'exemple de la résonance magnétique nucléaire (RMN) : l'excitation magnétique d'un noyau

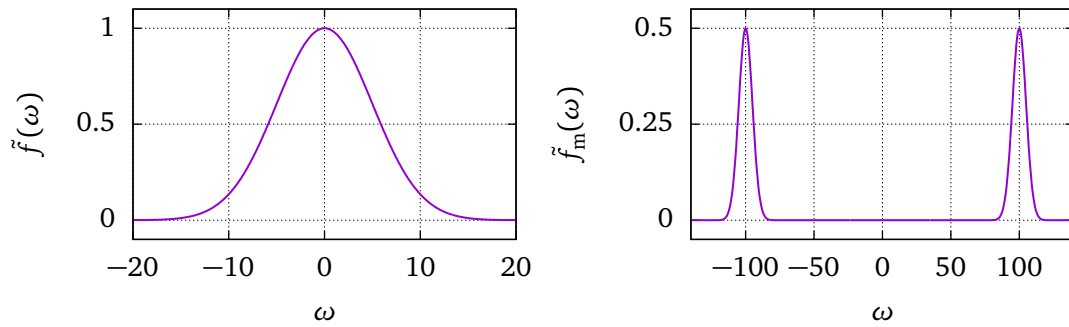


FIGURE 3.2 – Spectre du signal à transmettre de largeur $\Delta\omega = 5$ et du signal modulé avec une porteuse de pulsation $\omega_p = 100$.

d'hydrogène (par l'intermédiaire de son moment magnétique de spin) comporte une fréquence de résonance qui dépend de l'environnement atomique du noyau dans la molécule dans laquelle il se trouve. En conséquence, si une molécule comporte des protons qui ne sont pas équivalents du point de vue de leur emplacement dans la molécule, alors la réponse spectrale à une excitation magnétique comportera autant de pic de résonance qu'il y a de protons avec un environnement différent. Dans la molécule d'éthanol (CH_3CH_2OH), il y a trois types d'environnement pour les protons H , le spectre est donc constitué de trois pics (eux-même présentant une structure fine...). Typiquement, l'écart entre ces pics est de l'ordre de quelques centaines de Hz (pour une fréquence de résonance autour de quelques centaines de MHz).

Pour étudier ce système, on peut utiliser un champ magnétique oscillant sinusoidalement, et balayer en fréquence pour trouver une à une les fréquences de résonance. Mais on peut aussi utiliser une approche impulsionnelle (on parle alors de RMN impulsionnelle), qui met en jeu une excitation qui est un train d'onde sinusoidal de durée T :

$$f(t) = B_0 \cos(\omega_0 t) \Pi(t/T). \quad (3.44)$$

Le spectre de cette excitation est (en utilisant la transformée de Fourier d'un produit, Éq. (2.14), ou la relation (3.4))

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{B_0 T}{2} \left[\text{sinc}\left(\frac{T}{2}[\omega - \omega_0]\right) + \text{sinc}\left(\frac{T}{2}[\omega + \omega_0]\right) \right]. \quad (3.45)$$

Si la durée T de l'impulsion est assez courte, la largeur spectrale de l'impulsion, de l'ordre de $1/T$, peut-être suffisamment large pour englober toutes les fréquences de résonance. Dans le cas des molécules telle que l'éthanol, une durée inférieure la milliseconde permet d'exciter simultanément toutes les fréquences de résonance.

3.6 Séries de Fourier

3.6.1 Différentes « versions » de la transformée de Fourier

Avant de définir les séries de Fourier, faisons quelques considérations générales sur les différentes « versions » de la transformée de Fourier.

Nous avons étudié la transformée de Fourier pour les fonctions définies sur $G = \mathbb{R}$. Il est utile de définir la transformée de Fourier pour des fonctions définies sur d'autres ensembles, que nous allons rencontrer dans ce cours :

- $G = [0, T] = \mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$, il s'agit des fonctions T -périodiques. Il s'agit des séries de Fourier, c'est la forme sous laquelle la transformée de Fourier a été introduite. C'est l'exemple qui est étudié dans cette section.
- $G = T_c\mathbb{Z}$, les fonctions sont définies en des temps discrets. C'est le cadre de l'échantillonnage, où un signal physique continu est échantillonné à des temps discrets par le système de mesure.
- $G = T_c\llbracket 0, N-1 \rrbracket = T_c\mathbb{Z}/(N\mathbb{Z})$, les fonctions sont définies en un nombre fini de temps discrets, il s'agit de la transformée de Fourier discrète. Numériquement, les signaux sont traités sous cette forme.

Il y a une définition de la transformée de Fourier par ensemble G , mais les définitions et les propriétés se ressemblent. Il existe bien sûr un cadre mathématique commun pour décrire ces différentes versions de la transformée

de Fourier : elle peut être définie de façon générale pour les fonctions définies sur un groupe, mais la définition est trop abstraite pour être présentée dans ce cours. Donnons-en seulement les caractéristiques essentielles, en particulier en répondant à la question suivante : pour les ensembles G donnés en exemple, dans quel ensemble \hat{G} , appelé *dual* du groupe G , faut-il chercher les pulsations ω ?

D'une part, les fonctions $t \mapsto \exp(i\omega t)$ doivent appartenir à l'ensemble des fonctions de départ pour $\omega \in \hat{G}$. D'autre part, deux pulsations différentes doivent correspondre à des fonctions $t \mapsto \exp(i\omega t)$ différentes. Regardons les différents cas évoqués ci-dessus :

- $G = [0, T]$. Pour que $t \mapsto \exp(i\omega t)$ soit T -périodique, il faut que $\omega \in \frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}$; de plus, il est facile de voir que deux pulsations différentes de cet ensemble correspondent à des fonctions différentes, ainsi $\hat{G} = \frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}$.
- $G = T_e\mathbb{Z}$. Les fonctions $t \mapsto \exp(i\omega t)$ sont définies sur G pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, mais les fonctions correspondantes à ω et $\omega + 2k\pi/T_e$ sont identiques pour $k \in \mathbb{Z}$. Il faut donc se limiter à un intervalle de largeur $2\pi/T_e$: $\hat{G} = [0, 2\pi/T_e]$.
- $G = T_e\llbracket 0, N-1 \rrbracket$, on trouve alors $\hat{G} = \frac{2\pi}{T_e}\llbracket 0, N-1 \rrbracket$.

On peut donc résumer cette dualité dans un tableau :

$G \ni t$	$\hat{G} \ni \omega$
\mathbb{R}	\mathbb{R}
$[0, T]$	$\frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}$
$T_e\mathbb{Z}$	$[0, 2\pi/T_e]$
$T_e\llbracket 0, N-1 \rrbracket$	$\frac{2\pi}{T_e}\llbracket 0, N-1 \rrbracket$

3.6.2 Définition

Coefficients de Fourier : Soit une fonction f de période T ; ses coefficients de Fourier sont définis pour $k \in \mathbb{Z}$ par

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi kt/T} dt. \quad (3.46)$$

Peigne de Dirac : Le peigne de Dirac de période T est une distribution définie par

$$\text{III}_T(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT). \quad (3.47)$$

La convergence de la série de Fourier vers la fonction de départ vient de la formule suivante, qui est proche du théorème de Dirichlet.

Formule sommatoire de Poisson : La série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi kt}$ converge au sens des distributions vers le peigne de Dirac :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi kt} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - k) = \text{III}(t). \quad (3.48)$$

On ne démontre pas cette formule (la démonstration, qui repose sur le théorème de Riemann-Lebesgue, n'est pas très compliquée), mais on peut l'illustrer en regardant l'évolution des fonctions

$$f_q(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{-|k|} e^{2i\pi kt} = \frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos(2\pi t) + q^2} \quad (3.49)$$

pour $q \rightarrow 1^-$. Des exemples sont tracés en Fig. 3.3 pour différentes valeurs de q . On remarque que :

- pour $t \in \mathbb{Z}$, $f_q(t) = (1 + q)/(1 - q) \xrightarrow{q \rightarrow 1^-} \infty$,
- pour $t \notin \mathbb{Z}$, $f_q(t) \xrightarrow{q \rightarrow 1^-} 0$,

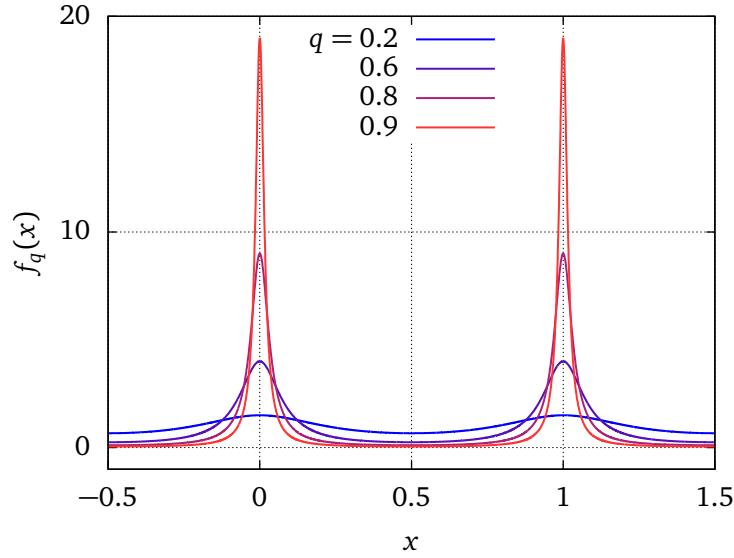


FIGURE 3.3 – Illustration de la formule sommatoire de Poisson : tracé des fonctions f_n définies en Éq. (3.49) pour différentes valeurs de n .

— pour tout q , $\int_{-1/2}^{1/2} f_q(t) dt = 1$.

Les fonctions f_q , sont donc des fonctions d'intégrale 1 sur une période qui se concentrent autour des valeurs entières.

Théorème de Dirichlet (convergence de la série de Fourier) : Soit une fonction f continue de période T dont les coefficients de Fourier sont c_k (Éq. (3.46)), alors

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi kt/T}. \quad (3.50)$$

Démonstration : Avec la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi kt/T} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi kt/T} \frac{1}{T} \int_0^T f(t') e^{-2i\pi kt'/T} dt' \quad (3.51)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t') \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi k(t-t')/T} \right] dt' \quad (3.52)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t') \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(\frac{t-t'}{T} - k\right) \right] dt' \quad (3.53)$$

$$= \int_0^T f(t') \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t-t'-kT) \right] dt' \quad (3.54)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t-kT) \int_0^T \delta(t-t'-kT) dt' \quad (3.55)$$

$$= f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t'') dt'' \quad (3.56)$$

$$= f(t). \quad (3.57)$$

On a utilisé que $f(t')\delta(t-t'-kT) = f(t-kT)\delta(t-t'-kT)$, la périodicité de f , $\delta(\alpha t) = \alpha^{-1}\delta(t)$, et le changement de variables $t'' = t-t'-kT$. \square

Remarque : Si la fonction f n'est pas continue, la série converge vers sa « régularisée », $f_r(t_0) = [\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)]/2$.

3.6.3 Lien avec la transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'une fonction périodique s'exprime simplement en fonction de ses coefficients de Fourier, c'est une somme de pics de Dirac aux pulsations $2\pi k/T$, $k \in \mathbb{Z}$.

Transformée de Fourier d'une fonction périodique : Soit f une fonction de période T et de coefficients de Fourier c_k , alors sa transformée de Fourier est donnée par

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi kt/T} \longrightarrow \tilde{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right). \quad (3.58)$$

Démonstration : Il suffit de prendre la transformée de Fourier terme à terme et d'utiliser la transformée de Fourier d'une exponentielle complexe. \square

Motif d'une fonction périodique : Soit f une fonction T -périodique. Son motif f_m est défini par

$$f_m(t) = \Pi(t/T) \times f(t). \quad (3.59)$$

Coefficients de Fourier et transformée du motif : Soit f une fonction T -périodique de motif f_m . Alors ses coefficients de Fourier c_k sont liés à la transformée de Fourier du motif par

$$c_k = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \tilde{f}_m\left(\frac{2k\pi}{T}\right). \quad (3.60)$$

Démonstration :

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2i\pi kt/T} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2i\pi kt/T} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi kt/T} f(t) \Pi\left(\frac{t}{T}\right) dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \tilde{f}_m\left(\frac{2k\pi}{T}\right). \quad (3.61)$$

\square

En injectant le résultat (3.60) dans la relation (3.58), on trouve

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \tilde{f}_m\left(\frac{2k\pi}{T}\right) = \frac{2\pi}{T} \text{III}_{2\pi/T}(\omega) \tilde{f}_m(\omega). \quad (3.62)$$

On peut arriver à cette relation différemment, en utilisant la transformée de Fourier du peigne de Dirac et les propriétés de la convolution.

Convolution du motif par le peigne de Dirac : Soit f une fonction T -périodique de motif f_m , alors

$$f = \text{III}_T * f_m. \quad (3.63)$$

Démonstration :

$$\text{III}_T * f_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{III}_T(t-t') f_m(t') dt' \quad (3.64)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t'-kT) \Pi\left(\frac{t'}{T}\right) f(t') dt' \quad (3.65)$$

$$= f(t) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t-t'-kT) dt' \quad (3.66)$$

$$= f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t') dt' \quad (3.67)$$

$$= f(t). \quad (3.68)$$

\square

Transformée de Fourier du peigne de Dirac :

$$\widetilde{\text{III}}_T(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \text{III}_{2\pi/T}(\omega). \quad (3.69)$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser la formule sommatoire de Poisson :

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{III}}_T(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT) e^{-i\omega t} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-ikT\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(\frac{\omega T}{2\pi} - k\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \text{III}_{2\pi/T}(\omega). \end{aligned} \quad (3.70)$$

□

On arrive donc à exprimer la transformée de Fourier d'une fonction périodique à partir de celle de son motif.

Soit f une fonction T -périodique de motif f_m , leur transformée de Fourier sont reliées par

$$\tilde{f} = \frac{2\pi}{T} \text{III}_{2\pi/T} \times \tilde{f}_m. \quad (3.71)$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la transformée de Fourier d'une convolution à la relation (3.63) :

$$\tilde{f} = \widetilde{\text{III}_T * f_m} = \sqrt{2\pi} \widetilde{\text{III}}_T \times \tilde{f}_m = \frac{2\pi}{T} \text{III}_{2\pi/T} \times \tilde{f}_m. \quad (3.72)$$

□

La transformée de Fourier d'une fonction T -périodique est obtenue en « prélevant » les pulsations multiples de $2\pi/T$ sur la transformée de Fourier de son motif.

Chapitre 4

Échantillonnage

Si les signaux physiques sont par nature *continus* pour la plupart (une signal sonore, un champ ondulatoire, etc.), leur *mesure* avec des instruments modernes (oscilloscope, enregistreur audio, caméscope, etc.) fournissent en général des signaux *finis* à variables *discrètes*, obtenus à partir d'un *échantillonnage* de valeurs prélevées sur le signal physique continu. On étudie dans ce chapitre l'effet de cet échantillonnage sur le spectre du signal observé.

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'effet de la période d'échantillonnage, en considérant le temps d'observation infiniment long. On y démontre un des théorèmes fondamentaux de la théorie de l'information, le théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist, qui énonce que l'on peut sous certaines conditions échantillonner un signal sans aucune perte d'information.

On passe ensuite à l'échantillonnage en temps fini, où l'on discute des effets qualitatifs de l'échantillonnage sur le spectre, et des conditions pour obtenir une bonne estimation du spectre. On y présente aussi la transformée de Fourier discrète et son calcul « rapide » par l'algorithme de Cooley-Tukey, qui est couramment utilisé.

4.1 Échantillonnage infiniment long

4.1.1 Signal échantillonné et transformée de Fourier

L'échantillonnage d'un signal continu f avec une période d'échantillonnage T_e est la donnée de la suite de valeurs discrètes $(f(kT_e))_{k \in \mathbb{Z}}$. Par commodité pour les calculs, on introduit le signal échantillonné.

Signal échantillonné : Soit f un signal continu ; pour une période d'échantillonnage T_e , on lui associe le signal échantillonné

$$f_e = \text{III}_{T_e} \times f. \quad (4.1)$$

Remarque : le signal échantillonné est une distribution.

Transformée de Fourier du signal échantillonné : la transformée de Fourier du signal échantillonné f_e est donnée par

$$\tilde{f}_e(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT_e) e^{-ikT_e\omega} \quad (4.2)$$

$$= \frac{1}{T_e} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{f}\left(\omega + \frac{2k\pi}{T_e}\right). \quad (4.3)$$

Démonstration : La première expression, Éq. (4.2), s'obtient en calculant directement la transformée de Fourier :

$$\tilde{f}_e(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT_e) \right] f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT_e) e^{-ikT_e\omega}. \quad (4.4)$$

La deuxième expression, Éq. (4.3), s'obtient en utilisant la transformée de Fourier d'un produit (Éq. (2.14)) :

$$\tilde{f}_e(\omega) = \widetilde{\text{III}_{T_e} \times f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widetilde{\text{III}_{T_e}} * \tilde{f}(\omega) \quad (4.5)$$

$$= \frac{1}{T_e} \text{III}_{2\pi/T_e} * \tilde{f}(\omega) \quad (4.6)$$

$$= \frac{1}{T_e} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(\omega - \omega' + \frac{2k\pi}{T_e}\right) \tilde{f}(\omega') d\omega' \quad (4.7)$$

$$= \frac{1}{T_e} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{f}\left(\omega + \frac{2k\pi}{T_e}\right). \quad (4.8)$$

□

La relation (4.2) donne la transformée de Fourier de la fonction échantillonnée en fonction des valeurs mesurées alors que la relation (4.3) donne sa signification à partir de la transformée du signal de départ. La transformée du signal échantillonné est obtenue à partir de celle du signal de départ par périodisation avec une période $2\pi/T_e$. En conséquence, on s'intéresse au spectre du signal échantillonné sur l'intervalle $[-\pi/T_e, \pi/T_e]$.

4.1.2 Échantillonnage sans perte d'information

Signal à bande limitée : Un signal f est à bande limitée si sa transformée de Fourier est à support borné :

$$\exists \Omega \text{ tel que } \forall \omega, |\omega| > \Omega \Rightarrow \tilde{f}(\omega) = 0. \quad (4.9)$$

Quand on échantillonne un signal f avec une période T_e (ou une pulsation $\omega_e = 2\pi/T_e$), deux cas se présentent, qui sont illustrés en Fig. 4.1 :

- Le signal est à bande limitée avec $\Omega < \frac{\pi}{T_e} = \frac{\omega_e}{2}$, alors les « composantes » de la périodisation ne se recouvrent pas et le spectre du signal échantillonné observé sur la fenêtre $[-\omega_e/2, \omega_e/2]$ correspond au spectre du signal f . On peut alors reconstruire exactement f à partir du signal échantillonné : c'est le théorème de Shannon-Nyquist.
- Le signal n'est pas à bande limitée, ou à bande limitée avec $\Omega > \omega_e/2$, alors les composantes de la périodisation se recouvrent : il y a *repliement de spectre*. En conséquence, tout dispositif d'échantillonnage (de numérisation) bien conçu comporte en général un filtre « anti-repliement » (« anti-aliasing » en anglais) dont le but est d'éliminer *avant* l'échantillonnage les pulsations supérieures à $\omega_e/2$.

Théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist : Tout signal f à bande limitée à Ω peut-être échantillonné sans perte d'information avec une période d'échantillonnage T_e si $\omega_e = 2\pi/T_e > 2\Omega$. Alors, le signal peut être reconstruit à partir des valeurs échantillonnées $(f(kT_e))_{k \in \mathbb{Z}}$ par la formule

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sinc}\left(\pi \left[\frac{t}{T_e} - k\right]\right) f(kT_e). \quad (4.10)$$

Démonstration : S'il n'y a pas de repliement de spectre, on peut écrire

$$\tilde{f}(\omega) = T_e \Pi_{\omega_e}(\omega) \tilde{f}_e(\omega). \quad (4.11)$$

Prenons la transformée de Fourier inverse de cette relation, en utilisant la propriété (2.10) :

$$f(t) = \frac{T_e}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}[\Pi_{\omega_e}] * f_e(t). \quad (4.12)$$

La transformée de Fourier inverse de la fonction porte se calcule avec la relation de dualité :

$$\mathcal{F}^{-1}[\Pi_{\omega_e}](t) = \frac{\omega_e}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}\left(\frac{\omega_e t}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T_e} \text{sinc}\left(\frac{\omega_e t}{2}\right). \quad (4.13)$$

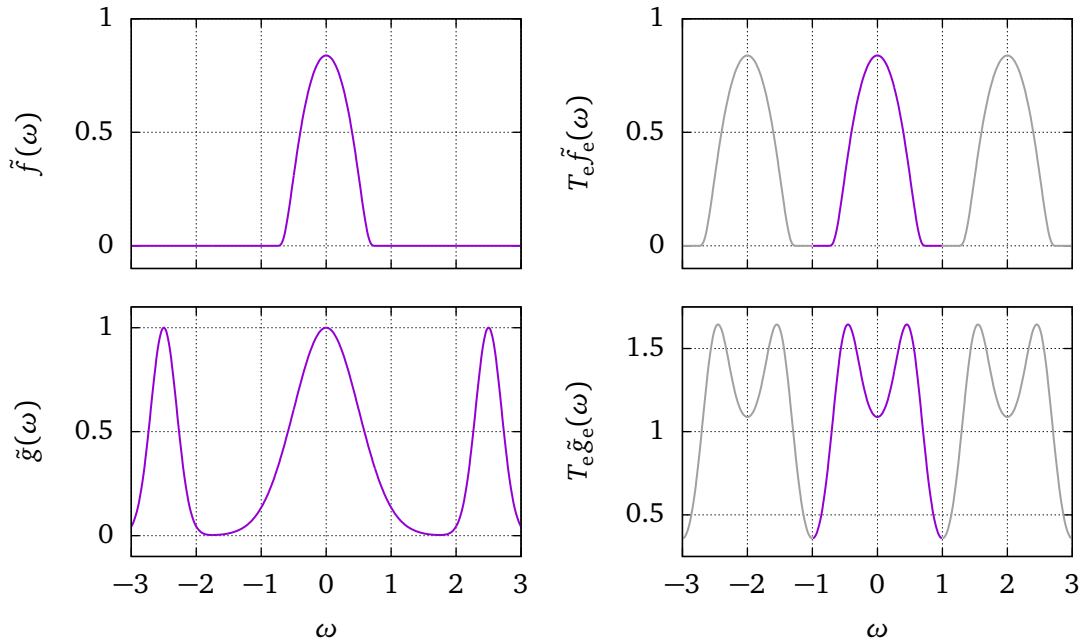


FIGURE 4.1 – Spectres du signal continu (gauche) et du signal échantillonné (droite) avec une pulsation $\omega_e = 2$. En haut, le signal est à bande limitée avec $\Omega = 0.8$, en bas, le signal n'est pas à bande limitée : un repliement du spectre est observé.

Ainsi, en utilisant la définition du signal échantillonné, Éq. (4.1),

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\omega_e(t-t')}{2}\right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t' - kT_e) f(kT_e) dt' \quad (4.14)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT_e) \text{sinc}\left(\frac{\omega_e(t - kT_e)}{2}\right). \quad (4.15)$$

□

Remarque : Échantillonner sans perte d'information signifie que la connaissance de la fonction échantillonnée f_e implique la connaissance complète de la fonction f . Cela ne signifie pas que le tracé de la fonction échantillonnée donne une représentation visuelle adéquate de la fonction continue.

Remarque : La transformée de Fourier d'un signal f peut s'écrire

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{(k-\frac{1}{2})T_e}^{(k+\frac{1}{2})T_e} e^{-i\omega t} f(t) dt, \quad (4.16)$$

où T_e est la fréquence d'échantillonnage. D'autre part, si le signal est à bande limitée à $\omega_e/2$, alors pour $\omega \in [-\omega_e/2, \omega_e/2]$,

$$\tilde{f}(\omega) = T_e \tilde{f}_e(\omega) = \frac{T_e}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-i\omega k T_e} f(kT_e), \quad (4.17)$$

où on a utilisé la relation (4.2), ce qui est exactement l'évaluation de l'expression (4.16) par la méthode des rectangles. Ainsi, le calcul de la transformée de Fourier d'un signal à bande limitée pour les pulsations inférieures à $\omega_e/2$ peut être fait *exactement* avec la méthode des rectangles avec une largeur T_e .

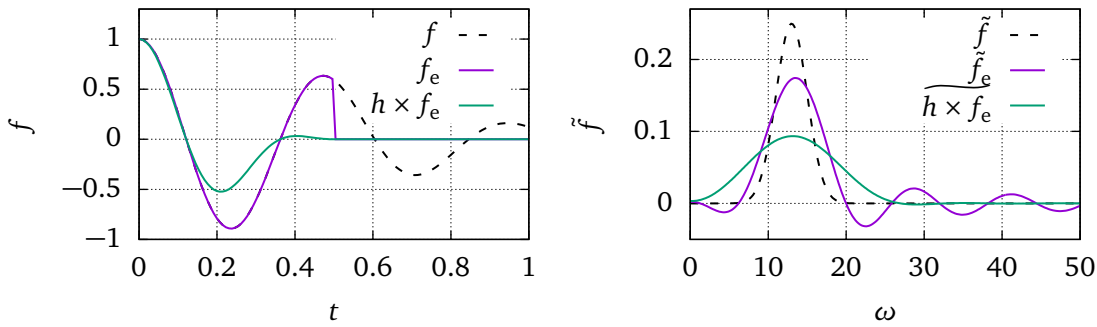


FIGURE 4.2 – Gauche : Signal f pair observé sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$, signal observé f_e et signal multiplié par la fenêtre de Hann (Éq. (4.19)). Droite : transformées de Fourier (paires) des trois signaux présentés à gauche. On remarque le signal artificiel à grand ω pour \tilde{f}_e , qui est réduit par l'utilisation de la fenêtre de Hann.

4.2 Échantillonnage en temps fini

4.2.1 Observation d'un signal continu pendant un temps fini

Quand on observe un signal continu f pendant un temps fini τ , le spectre observé peut être relié au spectre du signal initial par la propriété suivante.

Transformée de Fourier d'un signal observé pendant un temps fini : Soit f un signal continu observé pendant une durée τ ; on note $f_\tau(t) = \Pi_\tau(t)f(t)$ le signal observé. La transformée du signal observé est relié à la transformée de f par

$$\tilde{f}_\tau(\omega) = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\tau}{2}[\omega - \omega']\right) \tilde{f}(\omega') d\omega'. \quad (4.18)$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la relation (2.14) pour la transformée de Fourier d'un produit. \square

Comme le spectre du signal observé est obtenu à partir du spectre du signal par une convolution, l'observation pendant une durée finie réduit la résolution sur le spectre. La « résolution » du spectre est donnée par la largeur du signal cardinal qui intervient dans la convolution : $1/\tau$.

Nous avons vu que l'échantillonnage d'un signal avec une période T_e (mais pendant un temps infini) donnait, dans l'espace de Fourier, un spectre « périodisé » avec une période $\omega_e = 2\pi/T_e$. Ainsi, l'échantillonnage d'un signal pendant un temps fini donne un spectre périodisé avec une résolution finie.

Bien sûr, si le signal est nul en dehors de la période d'observation, il n'est pas affecté par la durée finie de l'observation.

Si f ne s'annule pas en $\pm\tau$, le signal observé $f(t) \times \Pi(t/\tau)$ est discontinu en $\pm\tau$. Cela modifie son spectre à grande pulsation (c'est lié au *phénomène de Gibbs*), comme illustré en Fig. 4.2 ; la modification vient de la convolution en Éq. (4.18), car le sinus cardinal décroît lentement à grande pulsation. Pour réduire ce signal parasite, on peut multiplier le signal f par une *fenêtre d'apodisation* h variant moins brutalement que la fonction porte. Un exemple simple est la fenêtre de Hann,

$$h(t) = \frac{1 + \cos(2\pi t)}{2}; \quad (4.19)$$

il est illustré en Fig. 4.2.

Le cas d'une fonction périodique observée pendant une durée finie est illustré en Fig. 4.3.

4.2.2 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

4.2.2.1 Définition

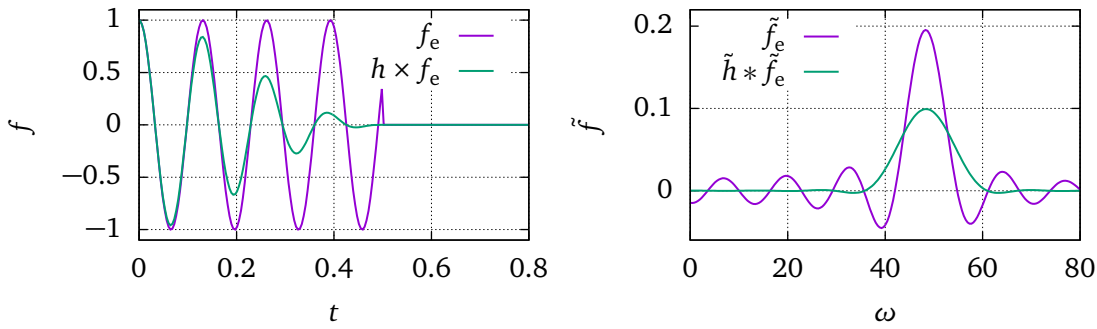


FIGURE 4.3 – Gauche : signal périodique observé pendant une durée finie et sa multiplication par la fenêtre de Hann. Droite : transformées de Fourier des signaux de gauche.

Transformée de Fourier discrète : La transformée de Fourier discrète de la suite finie $(f_j)_{0 \leq j \leq N-1}$ est la suite $(\tilde{f}_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ donnée par

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\frac{2i\pi jk}{N}}. \quad (4.20)$$

La transformée de Fourier inverse de la suite $(\tilde{f}_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ est la suite $(f_j)_{0 \leq j \leq N-1}$ donnée par

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{f}_k e^{\frac{2i\pi jk}{N}}. \quad (4.21)$$

Démonstration : La démonstration se fait comme pour la transformée de Fourier continue, mais elle est plus facile car il ne s'agit que de sommes finies :

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{f}_k e^{\frac{2i\pi jk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j'=0}^{N-1} f_{j'} e^{-\frac{2i\pi j'k}{N}} \right) e^{\frac{2i\pi jk}{N}} \quad (4.22)$$

$$= \sum_{j'=0}^{N-1} f_{j'} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi(j-j')k}{N}} \right) \quad (4.23)$$

$$= \sum_{j'=0}^{N-1} f_{j'} \delta_{j,j'} \quad (4.24)$$

$$= f_j \quad (4.25)$$

□

4.2.2.2 Transformation de Fourier Rapide (« FFT »)

Le calcul de la transformée de Fourier discrète (TFD) d'un signal de N points avec l'expression (4.20) prend un temps de calcul proportionnel à N^2 : le calcul de chacun des N points de la transformée de Fourier implique une somme de N termes. Néanmoins, il existe plusieurs algorithmes qui permettent de réduire considérablement le temps de calcul, qui devient proportionnel à $N \log(N)$, comme l'algorithme de Cooley-Tukey qui est présenté brièvement ci-dessous. Ce sont les algorithmes de transformation de Fourier rapide, ou « Fast Fourier Transform » (FFT) en anglais. Comme ils sont toujours utilisés pour calculer des transformées de Fourier discrètes, on appelle souvent « FFT » celles-ci.

Nous décrivons brièvement ici l'algorithme de Cooley-Tukey, qui nécessite que le nombre de points N soit une

puissance de 2. L'idée principale consiste à séparer les termes d'indices pairs et impairs dans la définition (4.20) :

$$\sqrt{N}\tilde{f}_k = \sum_{j=0}^{(N/2)-1} f_{2j} e^{-\frac{2i\pi jk}{(N/2)}} + e^{-\frac{2i\pi k}{N}} \sum_{j=0}^{(N/2)-1} f_{2j+1} e^{-\frac{2i\pi jk}{(N/2)}}. \quad (4.26)$$

On reconnaît dans le membre de droite deux transformées de Fourier discrètes de suites de $N/2$ points : les suites des termes d'indices pairs, $(f_j^p) = (f_{2j})_{0 \leq j < N/2}$, et impairs, $(f_j^i) = (f_{2j+1})_{0 \leq j < N/2}$:

$$\sqrt{2}\tilde{f}_k = \tilde{f}_k^p + e^{-\frac{2i\pi k}{N}} \tilde{f}_k^i. \quad (4.27)$$

L'indice k varie entre 0 et $N-1$; or les transformées de Fourier qui apparaissent à droite sont $N/2$ -périodiques, $\tilde{f}_{k+N/2}^p = \tilde{f}_k^p$, et $\tilde{f}_{k+N/2}^i = \tilde{f}_k^i$. De plus, $e^{-\frac{2i\pi(k+N/2)}{N}} = -e^{-\frac{2i\pi k}{N}}$; ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, N/2-1 \rrbracket$,

$$\sqrt{2}\tilde{f}_k = \tilde{f}_k^p + e^{-\frac{2i\pi k}{N}} \tilde{f}_k^i, \quad (4.28)$$

$$\sqrt{2}\tilde{f}_{k+N/2} = \tilde{f}_k^p - e^{-\frac{2i\pi k}{N}} \tilde{f}_k^i. \quad (4.29)$$

Ainsi pour calculer la TFD d'une suite de N points, il faut calculer la TFD de deux suites de $N/2$ points puis effectuer N opérations. En notant $\mathcal{T}(N)$ le temps de calcul nécessaire, on peut donc écrire $\mathcal{T}(N) = 2\mathcal{T}(N/2) + N$, ce qui donne par récurrence $\mathcal{T}(N) \sim N \log(N)$.

4.2.3 Signal échantillonné fini et transformée de Fourier

Signal échantillonné fini : Soit f un signal continu ; pour une période d'échantillonnage T_e et une durée d'échantillonnage $\tau = NT_e$, on lui associe le signal échantillonné

$$f_e(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_e) \delta(t - kT_e). \quad (4.30)$$

Remarque : Comme $f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y)$, $f(kT_e)\delta(t - kT_e) = f(t)\delta(t - kT_e)$.

Transformée de Fourier du signal échantillonné fini : Soit f_e un signal échantillonné de période T_e et de durée $\tau = NT_e$; l'échantillonnage de sa transformée de Fourier de période $2\pi/\tau$ est proportionnel à la transformée de Fourier discrète de la suite de points $(f_j = f(jT_e))_{0 \leq j \leq N-1}$.

Démonstration : La transformée de Fourier du signal échantillonné fini est donnée par

$$\tilde{f}_e(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_e) e^{-ikT_e\omega}. \quad (4.31)$$

Cette transformée de Fourier est périodique, de période $\omega_e = 2\pi/T_e$. Échantillonnons-la sur cette période avec un pas $2\pi/\tau = \omega_e/N$:

$$\tilde{f}_e\left(\frac{j\omega_e}{N}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_e) e^{-\frac{2i\pi jk}{N}}. \quad (4.32)$$

On retrouve la transformée de Fourier discrète de la suite $(f_j = f(jT_e))_{0 \leq j \leq N-1}$, à une constante $\sqrt{N/(2\pi)}$ près. \square

4.2.4 Transformée en Z

On mentionne simplement ici la transformée en Z , qui est l'analogue discret de la transformée de Laplace, comme la TFD est l'analogue discret de la transformée de Fourier. La transformée en z associée à une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la fonction

$$U(z) = \mathcal{Z}[u](z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n z^{-n}. \quad (4.33)$$

Elle vérifie le même type de propriétés que les transformées de Fourier et de Laplace.

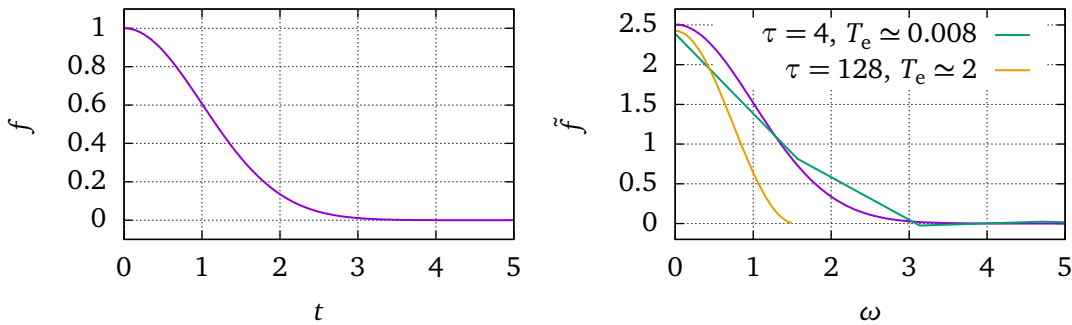


FIGURE 4.4 – Signal gaussien et sa TFD pour différentes valeurs de la période d'échantillonnage T_e et du temps d'observation τ . En violet, la TDF pour de bonnes valeurs des paramètres.

4.3 Estimation d'une TF à l'aide d'une TFD

4.3.1 Conditions pour une estimation correcte

Tout calcul de spectre réalisé numériquement consiste non pas en un calcul de transformée de Fourier au sens de la TF d'une fonction, mais en un calcul de transformée de Fourier discrète, effectué sur un échantillonnage de durée finie du signal continu (ou analogique) dont on cherche à estimer le spectre. Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que l'on obtenait un échantillonnage fréquentiel d'un spectre qui n'est pas celui du signal, mais celui de sa version échantillonnée à durée finie. Sous quelles conditions ces deux spectres sont-ils semblables ?

- Une première condition est donnée par le critère d'échantillonnage de Shannon : il faut que le signal soit à bande limitée à Ω , et que la période d'échantillonnage vérifie $T_e < \pi/\Omega$. Si cette condition n'est pas vérifiée, le spectre estimé diffère du spectre exact à cause du phénomène de repliement de spectre.
- Une seconde condition est que la durée d'acquisition τ doit être suffisamment grande pour que la résolution du spectre, d'ordre $1/\tau$, soit plus faible que le plus petit intervalle de fréquences sur lequel le spectre exact présente des variations significatives. Cette condition est automatiquement satisfaite si le signal est à durée finie, inférieure à τ .

Malheureusement, les deux conditions données ci-dessus sont incompatibles : si le signal est à bande limitée, on peut montrer qu'il est nécessairement illimité dans le temps. Réciproquement, si le signal est à durée finie, il ne peut alors être à bande limitée. On ne peut donc jamais déterminer de façon exacte un spectre, mais il n'y a en revanche aucune limite théorique à la précision de l'estimation : il suffit d'échantillonner suffisamment rapidement, et pendant un temps suffisamment long, pour avoir une estimation aussi précise que voulue.

Expérimentalement, d'autres facteurs limitent la précision de l'estimation d'un spectre, comme le bruit, la quantification des mesures, la résolution temporelle, etc. Le meilleur échantillonnage temporel qui soit (en terme de période T_e et de durée d'acquisition τ) est tel que l'erreur d'estimation sur le spectre exact soit limité par les autres facteurs. La prédiction des valeurs optimales de T_e et τ en fonction de ces facteurs est possible, mais sort du cadre de ce cours.

4.3.2 Exemples

Des exemples de TFD calculées avec de mauvais paramètres sont donnés en Fig. 4.4 pour un signal gaussien, $f(t) = \exp(-t^2/2)$, et en Fig. 4.5 pour un signal quasi-périodique, $f(t) = \cos(t) \exp(-t^2/800)$.

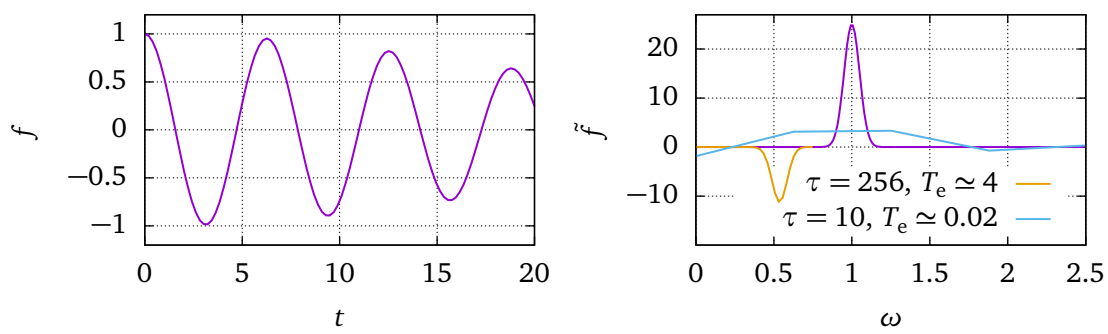


FIGURE 4.5 – Signal quasi-périodique et sa TFD pour différentes valeurs de la période d'échantillonnage T_e et du temps d'observation τ . En violet, la TFD pour de bonnes valeurs des paramètres.

Troisième partie

Bruit

Chapitre 5

Signaux aléatoires

Comme dans les chapitres précédents, les signaux dont il est question peuvent dépendre des variables temporelles et spatiales. Pour simplifier les notations, le temps est inclus dans la variable d'espace \mathbf{r} .

5.1 Définition

Espace fondamental, probabilité : On note Ω l'espace fondamental contenant toutes les réalisations possibles d'une expérience. On note $d\mu(s)$ la mesure de probabilité sur Ω et $P[E]$ la probabilité d'un événement $E \subset \Omega$.

Remarque : On pourra se référer au cours de Méthodes Mathématiques de 2^{ème} année pour la définition précise de l'espace fondamental.

Signal aléatoire (ou bruit) : Un signal aléatoire u est une fonction qui à une réalisation $s \in \Omega$ associe le signal $u(t, s)$.

Remarque : On ne considère que des signaux à valeurs *réelles*. Les notions vues dans ce contexte se généralisent aux cas des signaux à valeurs complexes.

Moyenne d'ensemble : La moyenne d'ensemble d'un signal aléatoire $u(t, s)$ est l'espérance de sa valeur au point t au sens probabiliste, c'est à dire la moyenne sur les réalisations :

$$E[u(t)] = \int_{\Omega} u(t, s) d\mu(s). \quad (5.1)$$

Moyenne temporelle : La moyenne temporelle d'un signal aléatoire $u(t, s)$ est la moyenne sur le temps pour une réalisation donnée :

$$\langle u(t, s) \rangle = \frac{1}{T} \int u(t, s) dt, \quad (5.2)$$

où T est le temps d'observation.

Des exemples de réalisation d'un signal aléatoire sont données en Fig. 5.1.

5.2 Description statistique

Fonction de répartition d'ordre n : Pour un signal aléatoire u et un entier strictement positif n , la fonction de

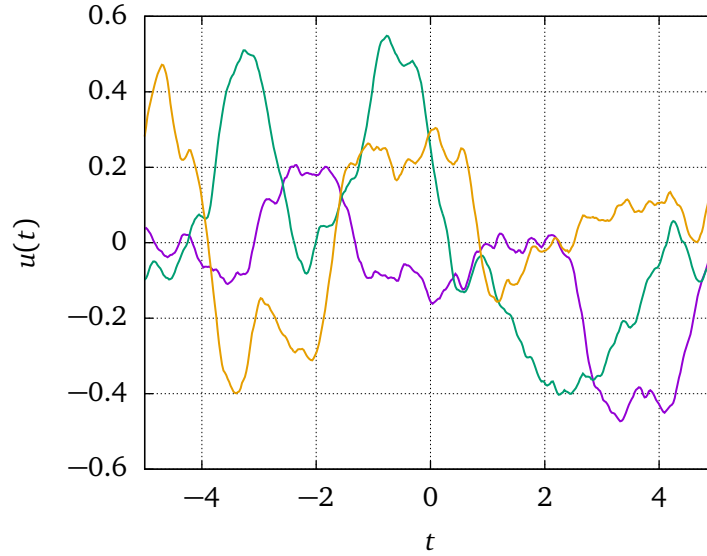


FIGURE 5.1 – Trois réalisations d'un signal aléatoire.

répartition d'ordre n est la fonction de $2n$ variables donnée par

$$F_{u,n}(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) = P[u(t_1) \leq u_1 \cap \dots \cap u(t_n) \leq u_n]. \quad (5.3)$$

On en déduit la densité de probabilité

$$p_{u,n}(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial u_1 \dots \partial u_n} F_{u,n}(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n). \quad (5.4)$$

Remarque : La fonction de répartition peut aussi s'écrire comme une espérance en utilisant la fonction de Heaviside θ :

$$F_{u,n}(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) = E \left[\prod_{i=1}^n \theta(u_i - u(t_i)) \right]. \quad (5.5)$$

Au premier ordre, on en déduit :

- la moyenne $m(t) = E[u(t)]$,
- la puissance $P_u(t) = E[u(t)^2]$, la variance $v(t) = P_u(t) - m(t)^2$, et le niveau de bruit $\sigma(t) = \sqrt{v(t)}$,
- le moment d'ordre k , $E[u(t)^k]$, et le moment centré d'ordre k par $E[(u(t) - m(t))^k]$.

Auto-corrélation d'un signal, puissance : Soit u un signal aléatoire de moyenne $m(t)$; on définit son auto-corrélation Γ_u et sa covariance C_u par

$$\Gamma_u(t_1, t_2) = E[u(t_1)u(t_2)], \quad (5.6)$$

$$C_u(t_1, t_2) = E[(u(t_1) - m(t_1))(u(t_2) - m(t_2))]. \quad (5.7)$$

La puissance du signal est $P_u(t) = \Gamma_u(t, t)$.

Plus généralement, on peut introduire la *fonction de corrélation à n -points*, $E[u(t_1) \times \dots \times u(t_n)]$.

Corrélation de deux signaux : Soient u et v deux signaux aléatoires, de moyennes $m_u(t)$ et $m_v(t)$; on définit leur corrélation $\Gamma_{u,v}$ et leur covariance $C_{u,v}$ par

$$\Gamma_{u,v}(t_1, t_2) = E[u(t_1)v(t_2)], \quad (5.8)$$

$$C_{u,v}(t_1, t_2) = E[(u(t_1) - m_u(t_1))(v(t_2) - m_v(t_2))]. \quad (5.9)$$

Les deux signaux sont dits décorrélés si leur covariance est nulle, $C_{u,v} = 0$.

Remarques :

- Pour des signaux u et v décorrélés, $\Gamma_{u,v}(t_1, t_2) = m_u(t_1)m_v(t_2)$; pour des signaux à moyennes non nulles, la corrélation est donc non nulle.
- Deux signaux décorrélés ne sont pas nécessairement indépendants.

5.3 Invariance et ergodicité

Invariance : Un signal aléatoire u est invariant si pour tout entier $n \geq 1$ sa fonction de répartition d'ordre n est invariante par translation globale : pour tout temps t_0 ,

$$F_{u,n}(u_1, \dots, u_n; t_1 + t_0, \dots, t_n + t_0) = F_{u,n}(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n). \quad (5.10)$$

Remarques :

- En posant $t_0 = -t_n$, on voit que la fonction de répartition d'ordre n ne dépend que de $n - 1$ temps. En particulier, la moyenne m est constante et la corrélation ne dépend que de la différence des temps, on notera alors $\Gamma_u(t_1, t_2) = \Gamma_u(t_1 - t_2)$. On se sert de ces propriétés pour définir l'invariance faible.
- La puissance d'un signal aléatoire invariant u est $P_u = \Gamma_u(0)$.

Invariance faible : Un signal aléatoire u est invariant au sens faible si sa moyenne est constante et si sa corrélation ne dépend que de la différence des temps.

Remarque : En pratique, l'invariance faible est très souvent suffisante pour caractériser et manipuler simplement des processus aléatoires.

La corrélation Γ_u d'un signal stationnaire au sens faible u vérifie

$$\Gamma_u(t) = \Gamma_u(-t), \quad (5.11)$$

$$\Gamma_u(t) \leq \Gamma_u(0). \quad (5.12)$$

Démonstration : La première égalité s'obtient simplement à partir de la définition :

$$\Gamma_u(t) = E[u(t)u(0)] = E[u(0)u(t)] = \Gamma_u(-t). \quad (5.13)$$

La seconde s'obtient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\Gamma_u(t) = E[u(t)u(0)] \leq \sqrt{E[u(t)^2]E[u(0)^2]} = \Gamma_u(0). \quad (5.14)$$

□

Invariance faible conjointe : Deux signaux aléatoires invariants au sens faible u et v sont conjointement invariants au sens faible si leur corrélation ne dépend que de la différence des temps.

Remarque : De la même manière que pour un seul signal, on montre que la corrélation $\Gamma_{u,v}$ de deux signaux conjointement invariants u et v vérifie $\Gamma_{u,v}(t) \leq \sqrt{\Gamma_u(0)\Gamma_v(0)}$.

Ergodicité : Un signal aléatoire invariant u est ergodique si pour tout n , la fonction de répartition d'ordre n est égale à la moyenne temporelle

$$F_{u,n}(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) = \left\langle \prod_{i=1}^n \theta(u_i - u(t_i + t)) \right\rangle, \quad (5.15)$$

où la moyenne temporelle porte sur la variable t .

Remarque : Les deux membres de l'équation (5.15) ne dépendent que de $n - 1$ temps :

- pour le membre de gauche, cela vient de l'hypothèse d'invariance,
- pour le membre de droite, cela vient de la définition de la moyenne temporelle.

Pour un processus ergodique, les moyennes d'ensemble et temporelles sont égales. Par exemple, la fonction de corrélation peut être mesurée avec

$$\Gamma_u(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t + t')u(t')dt', \quad (5.16)$$

où T est le temps d'observation.

Chapitre 6

Propriétés spectrales des signaux aléatoires

6.1 Densité spectrale de puissance d'un signal déterministe

Pour un signal f d'énergie finie (voir Eq. (3.23)), l'énergie peut aussi être calculée à partir de sa transformée de Fourier avec la relation de Parseval-Plancherel (Eq. 3.7) :

$$E_f = \int f(t)^2 dt = \int |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (6.1)$$

Densité spectrale d'énergie : Soit f un signal d'énergie finie, de transformée de Fourier \tilde{f} ; sa densité spectrale d'énergie est définie par $\mathcal{E}_f(\omega) = |\tilde{f}(\omega)|^2$.

Cependant, il existe de nombreux signaux qui ne sont pas d'énergie finie et qui n'admettent pas de transformée de Fourier au sens des fonctions, auxquels on ne peut donc pas associer une densité spectrale d'énergie. C'est le cas du signal $f(t) = 2 \cos(\omega_0 t)$. Sa transformée de Fourier est la distribution $\tilde{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$. Le carré de la distribution de Dirac n'est pas défini, on ne peut donc pas associer une densité d'énergie au signal f .

Puissance d'un signal : La puissance d'un signal f , si elle existe, est définie par

$$P_f = \langle f(t)^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt. \quad (6.2)$$

Densité spectrale de puissance : La densité spectrale de puissance d'un signal f de puissance finie est donnée par

$$\mathcal{G}_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \left| \int_0^T f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (6.3)$$

Pour un signal f de puissance finie P_f , la densité spectrale de puissance $\mathcal{G}_f(\omega)$ est liée à la puissance par

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_f(\omega) d\omega. \quad (6.4)$$

Démonstration : On peut développer la définition de la densité spectrale de puissance (Eq. (6.3)) :

$$\mathcal{G}_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_0^T f(t) f(t') e^{i\omega(t'-t)} dt dt'. \quad (6.5)$$

En intégrant par rapport à ω et en intervertissant (sans sourciller) la limite et l'intégrale, puis en utilisant $\int e^{i\omega(t-t')} = 2\pi\delta(t-t')$, on trouve la relation cherchée. \square

Reprenons l'exemple du signal $f(t) = 2\cos(\omega_0 t)$. Sa puissance est $P_f = 2$. Calculons sa densité spectrale de puissance pour la pulsation ω :

$$\mathcal{G}_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \left| \int_0^T 2\cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (6.6)$$

Il faut donc calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^T 2\cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^T [e^{i(\omega_0 - \omega)t} + e^{-i(\omega_0 + \omega)t}] dt. \quad (6.7)$$

Pour simplifier, remplaçons l'intervalle $[0, T]$ par $[-T/2, T/2]$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} 2\cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt = T \left[\text{sinc}\left(\frac{T[\omega_0 - \omega]}{2}\right) + \text{sinc}\left(\frac{T[\omega_0 + \omega]}{2}\right) \right], \quad (6.8)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} 2\cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 &= T \text{sinc}\left(\frac{T[\omega_0 - \omega]}{2}\right)^2 + T \text{sinc}\left(\frac{T[\omega_0 + \omega]}{2}\right)^2 \\ &\quad + 2T \text{sinc}\left(\frac{T[\omega_0 - \omega]}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{T[\omega_0 + \omega]}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.9)$$

En prenant la limite $T \rightarrow \infty$ au sens des distributions et en utilisant que $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x)^2 dx = \pi$, on obtient

$$\mathcal{G}_f(\omega) = \sqrt{2\pi} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (6.10)$$

Ce résultat est cohérent avec la puissance $P_f = 2$ et la relation (6.4).

6.2 Densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire stationnaire

On considère un signal aléatoire invariant. Une réalisation d'un tel signal n'est en général pas d'énergie finie, il faut donc utiliser la densité de puissance. La définition de la densité spectrale de puissance est définie comme pour un signal déterministe, mais en prenant l'espérance sur les réalisations du résultat obtenu.

Densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire : Soit u un signal aléatoire invariant, on définit alors sa densité spectrale de puissance par

$$\mathcal{G}_u(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \mathbb{E} \left[\left| \int_0^T u(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right]. \quad (6.11)$$

Comme elle fait intervenir l'espérance sur les réalisations, la densité spectrale de puissance ne peut a priori pas être calculée à partir d'une seule réalisation du signal.

Théorème de Wiener-Khinchin : Soit u un signal aléatoire invariant. Sa densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de sa corrélation :

$$\mathcal{G}_u = \tilde{\Gamma}_u. \quad (6.12)$$

Démonstration : Calculons l'espérance qui intervient dans la densité spectrale de puissance de u :

$$E \left[\left| \int_0^T u(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right] = E \left[\int \int u(t) u(t') e^{-i\omega(t-t')} dt dt' \right] \quad (6.13)$$

$$= \int \int E[u(t) u(t')] e^{-i\omega(t-t')} dt dt' \quad (6.14)$$

$$= \int \Gamma_u(t-t') e^{-i\omega(t-t')} dt dt' \quad (6.15)$$

$$= \int \Gamma_u(t'') e^{-i\omega t''} dt dt'' \quad (6.16)$$

$$\underset{T \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi T} \tilde{\Gamma}_u(\omega). \quad (6.17)$$

Nous avons interverti l'espérance et l'intégrale, puis utilisé l'invariance du signal pour écrire sa corrélation comme fonction de la différence des temps t et t' . \square

Ce théorème permet de calculer la densité spectrale de puissance à partir de la corrélation, qui est la quantité que l'on mesure directement en pratique. De plus, si le signal est ergodique, la corrélation peut-être obtenue à partir d'une moyenne spatiale sur une seule réalisation.

La puissance moyenne d'un signal aléatoire invariant u est donnée par

$$P_u = E[u(0)^2] = \Gamma_u(0). \quad (6.18)$$

D'après le théorème de Wiener-Khinchin, la puissance moyenne peut-être déduite de la densité spectrale de puissance par

$$P_u = \Gamma_u(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_u(\omega) d\omega. \quad (6.19)$$

Densité spectrale croisée de signaux aléatoires : Soient u et v des signaux aléatoires conjointement invariants au sens faible. On définit leur densité spectrale croisée par

$$\mathcal{G}_{u,v}(\mathbf{k}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} E \left[\left(\int_0^T u(t) e^{-i\omega t} dt \right) \overline{\left(\int_0^T v(t) e^{-i\omega t} dt \right)} \right]. \quad (6.20)$$

Théorème de Wiener-Khinchin pour la densité spectrale croisée : Soient u et v des signaux aléatoires conjointement invariants au sens faible ; leur densité spectrale croisée est la transformée de Fourier de leur corrélation,

$$\mathcal{G}_{u,v} = \tilde{\Gamma}_{u,v}. \quad (6.21)$$

Démonstration : Comme pour le cas à un seul signal. \square

6.3 Filtrage linéaire d'un signal aléatoire

On considère dans cette section le filtrage de signaux aléatoire par un système linéaire de réponse impulsionnelle h . Pour un signal aléatoire d'entrée u , le signal de sortie est donc $u_h = h * u$.

Par linéarité, l'espérance du signal de sortie est :

$$E[u_h(t)] = E[h * u(t)] = h * E[u(t)]. \quad (6.22)$$

Soient u et v deux signaux conjointement invariants au sens faible, et un filtre linéaire de réponse impulsionnelle h . Les densités spectrales après filtrage sont déduites de celles des signaux d'entrée par

$$\mathcal{G}_{h*u} = 2\pi |\tilde{h}|^2 \mathcal{G}_u, \quad (6.23)$$

$$\mathcal{G}_{h*u, h*v} = 2\pi |\tilde{h}|^2 \mathcal{G}_{u,v}. \quad (6.24)$$

Démonstration : Considérons seulement le cas à deux signaux. La corrélation $\Gamma_{u,v}$ des signaux de sortie peut être exprimée à partir de celle des signaux d'entrée :

$$\Gamma_{h*u, h*v}(t, t') = E[h * u(t) h * v(t')] \quad (6.25)$$

$$= \int h(t - t'') h(t' - t''') \Gamma_{u,v}(t'', t''') dt'' dt'''. \quad (6.26)$$

Par l'invariance, $\Gamma_{u,v}(t'', t''') = \Gamma_{u,v}(t'' - t''')$. En introduisant $h^-(t) = h(-t)$ et la variable $s = t'' - t'''$, on a

$$\Gamma_{h*u, h*v}(t, t') = \int h(t - t'') h^-(t'' - t' - s) \Gamma_{u,v}(s) dt'' ds \quad (6.27)$$

$$= \int h(t - t'') h^- * \Gamma_{u,v}(t'' - t') dt'' \quad (6.28)$$

$$= h * h^- * \Gamma_{u,v}(t - t'). \quad (6.29)$$

Avec l'égalité sur la moyenne, celle-ci montre que l'invariance conjointe de deux signaux aléatoires est préservée par le filtrage linéaire. On peut donc écrire

$$\Gamma_{h*u, h*v} = h * h^- * \Gamma_{u,v}. \quad (6.30)$$

La densité spectrale croisée des signaux filtrés est obtenue avec le théorème de Wiener-Khinchin (Eq. (6.21)) :

$$\mathcal{G}_{h*u, h*v} = \tilde{\Gamma}_{h*u, h*v} = \mathcal{F}[h * h^- * \Gamma_{u,v}] = 2\pi \tilde{h} \times \tilde{h}^- \times \mathcal{G}_{u,v}. \quad (6.31)$$

On montre facilement que $\tilde{h}^- = \tilde{\tilde{h}}$, d'où l'on déduit le résultat recherché. \square

La densité spectrale de puissance est filtrée par le carré de la fonction de transfert (appelé « fonction de transfert en puissance »). En conséquence, si l'on ne peut pas raisonner sur les transformées de Fourier de signaux aléatoires, on peut raisonner comme pour les signaux déterministes sur leur densité spectrale de puissance.

Chapitre 7

Exemples

7.1 Bruit blanc

Bruit blanc : Un bruit blanc est un signal aléatoire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance constante.

Remarques :

- D'après le théorème de Wiener-Khinchin, la corrélation d'un bruit blanc u est

$$\Gamma_u(t) = \sqrt{2\pi} \mathcal{G}_0 \delta(t) :$$

un bruit blanc est un signal totalement décorréolé temporellement.

- La puissance moyenne d'un bruit blanc u est

$$P_u = \Gamma_u(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{G}_u(\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{G}_0 d\omega = \infty. \quad (7.1)$$

Le bruit blanc correspond donc à un modèle théorique limite qui ne peut exister en pratique

- En pratique, on parle de bruit blanc si la densité spectrale de puissance est constante *pour le domaine de pulsations considéré* Ω . Dans ce cas, la puissance du bruit est donnée par $P_u = |\Omega| \mathcal{G}_0 / \sqrt{2\pi}$. Le niveau de bruit dépend alors de la bande passante et il est caractérisé par $\sqrt{\mathcal{G}_0}$, qui s'exprime en l'unité du signal multipliée par la racine d'un temps.
- Le bruit blanc est souvent d'origine thermique.

7.2 Bruit rose

Bruit rose : Un bruit rose est un signal aléatoire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $\mathcal{G}_u(\omega) \sim 1/\omega$.

Remarques :

- On parle aussi de bruit rose pour une densité spectrale de puissance de la forme $\omega^{-\alpha}$.
- Le bruit rose peut venir du désordre dans les composants électroniques.

7.3 Détection synchrone

On souhaite envoyer une « information » $V \in \mathbb{R}$ à travers un canal bruité; le bruit $u(t)$ est caractérisé par sa densité spectrale de puissance $\mathcal{G}_u(\omega)$. On cherche la méthode de transport et de détection qui maximise le rapport signal sur bruit.

7.3.1 Mesure à temps fixé

La première méthode consiste à envoyer le signal $f(t) = V$, et à mesurer le signal $g(t) = f(t) + u(t) = V + u(t)$ à un temps t donné. Le rapport signal sur bruit vaut alors

$$\rho = \frac{V}{\sqrt{\mathbb{E}[u(t)^2]}} = \frac{V}{\sqrt{\Gamma_u(0)}}. \quad (7.2)$$

Cette méthode de détection ne permet pas de modifier ce rapport.

7.3.2 Intégration temporelle

La deuxième méthode consiste à envoyer le même signal $f(t) = V$, mais cette fois à mesurer le signal reçu intégré dans le temps

$$M = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt = V + \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt. \quad (7.3)$$

Estimons la variance du bruit sur le signal reçu :

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \right)^2 \right] \simeq \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \mathcal{G}_u(0), \quad (7.4)$$

d'après la définition de la densité spectrale de puissance, Eq. (6.11). Le rapport signal sur bruit est donc

$$\rho = \frac{V\sqrt{T}}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\mathcal{G}_u(0)}}. \quad (7.5)$$

Le rapport signal sur bruit dépend maintenant du temps d'observation : il suffit d'attendre assez longtemps pour atteindre la précision voulue.

7.3.3 Détection synchrone

La troisième méthode consiste à envoyer un signal modulé à la pulsation ω : $f(t) = V \cos(\omega t)$. On mesure alors

$$M = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(\omega t) g(t) dt = \frac{2V}{T} \int_0^T \cos(\omega t)^2 dt + \frac{2}{T} \int_0^T \cos(\omega t) u(t) dt. \quad (7.6)$$

La composante de « signal » est donnée par

$$\frac{2V}{T} \int_0^T \cos(\omega t)^2 dt = V [1 + \text{sinc}(2\omega T)] \underset{\omega T \gg 1}{\simeq} V. \quad (7.7)$$

Il reste à évaluer la variance de la composante de bruit :

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{2}{T} \int_0^T \cos(\omega t) u(t) dt \right)^2 \right] = \frac{1}{T^2} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T e^{i\omega t} u(t) dt + \int_0^T e^{-i\omega t} u(t) dt \right)^2 \right] \quad (7.8)$$

$$= \frac{1}{T^2} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T e^{i\omega t} u(t) dt \right)^2 + \left(\int_0^T e^{-i\omega t} u(t) dt \right)^2 + 2 \left| \int_0^T e^{i\omega t} u(t) dt \right|^2 \right]. \quad (7.9)$$

Le deuxième terme est le complexe conjugué du premier ; évaluons le premier terme :

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T e^{i\omega t} u(t) dt \right)^2 \right] = \int \int e^{i\omega(t+t')} \mathbb{E}[u(t)u(t')] dt dt' \quad (7.10)$$

$$= \int \int e^{i2\omega t''} \Gamma_u(t''') dt'' dt''' \quad (7.11)$$

$$\simeq T e^{i\omega T} \text{sinc}(2\omega T) \times \sqrt{2\pi} \mathcal{G}_u(0). \quad (7.12)$$

On a effectué le changement de variables $t'' = (t + t')/2$, $t''' = t - t'$, de jacobien 1, et on a approximé le domaine d'intégration par $[0, T] \times] - \infty, \infty[$ à la dernière ligne. Le point important est que ce terme est d'ordre 1 (il n'augmente pas avec T). Le dernier terme donne

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^T e^{i\omega t} u(t) dt \right|^2 \right] \underset{\omega T \gg 1}{\simeq} \sqrt{2\pi} T \mathcal{G}_u(\omega). \quad (7.13)$$

Ce terme augmente linéairement avec T , il domine donc le terme précédent.

Ainsi

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{2}{T} \int_0^T \cos(\omega t) u(t) dt \right)^2 \right] \simeq \frac{2\sqrt{2\pi}}{T} \mathcal{G}_u(\omega), \quad (7.14)$$

et le rapport signal sur bruit vaut

$$\rho \simeq \frac{V\sqrt{T}}{\sqrt{2\sqrt{2\pi}\mathcal{G}_u(\omega)}}. \quad (7.15)$$

On obtient la même dépendance en T qu'avec la mesure par intégration : en attendant plus longtemps, la mesure devient plus précise. La différence est que c'est maintenant la densité spectrale de puissance à la pulsation ω qui intervient. Cette méthode est meilleure car en général $\mathcal{G}_u(\omega) < \mathcal{G}_u(0)$; c'est par exemple le cas en présence de bruit rose.

7.3.4 Envoi d'un signal $V(t)$

Si l'information à envoyer n'est plus un nombre mais un signal $V(t)$, on envoie cette fois $V(t)\cos(\omega t)$. Pour la mesure, l'intégration temporelle est remplacé par un filtre passe-bas.

7.4 Somme de signaux aléatoires, interférences

Considérons la somme de deux signaux aléatoires invariants u et v de moyennes nulles : $w = u + v$. La puissance moyenne du signal vaut

$$P_w = \Gamma_w(0) = \mathbb{E}[(u(0) + v(0))^2] = P_u + P_v + 2\Gamma_{u,v}(0). \quad (7.16)$$

Si les deux signaux sont indépendants, $\Gamma_{u,v}(0) = 0$ (car ils sont de moyenne nulle), et le niveau de bruit vaut $\sigma_w = \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}$. De la même manière la somme w de N signaux indépendants de niveau de bruit σ_1 est donnée par

$$\sigma_N = \sqrt{N}\sigma_1. \quad (7.17)$$

Considérons maintenant la somme d'un signal avec sa copie translatée de t_0 : $w(t) = u(t) + u(t - t_0)$. La puissance est donnée par

$$P_w = 2\Gamma_u(0) \left[1 + \frac{\Gamma_u(t_0)}{\Gamma_u(0)} \right]. \quad (7.18)$$

Il s'agit du phénomène d'interférence que l'on rencontre en optique.

Cette équation montre que la mesure de l'intensité (i.e., la puissance) en fonction du retard entre les deux faisceaux permet d'accéder au travers du terme d'interférence à la corrélation normalisée. Par le théorème de Wiener-Khinchin, on peut en déduire la densité spectrale de puissance du signal $u(t)$. C'est le principe de la spectroscopie optique par transformée de Fourier.